

# Einführung in die Statistische Qualitätskontrolle

**Leo Knüsel, Universität München**

## V o r w o r t

Das vorliegende Skript ist entstanden aus Vorlesungen, welche ich mehrfach an der Universität München gehalten habe. Es werden die wichtigsten Kapitel der klassischen statistischen Qualitätskontrolle behandelt, wie sie etwa zu finden sind bei Uhlmann (1982). Dabei hinterlässt der Einsatz des Computers mit dem Programm Maple (Analysis, numerische Mathematik etc.) deutliche Spuren. So sind wir in der Lage, bei der Attributenkontrolle auch randomisierte Prüfpläne zu untersuchen; solche Prüfpläne ermöglichen eine weitere Reduktion des notwendigen Stichprobenumfangs, und sie erlauben symmetrische Lösungen, bei denen das Produzentenrisiko mit dem Konsumentenrisiko übereinstimmt; weiter können wir mit Hilfe von randomisierten Entscheidungen bei zweistufigen Prüfplänen die kritischen Grenzen so zu bestimmen, dass die Operationscharakteristik genau durch die vorgegebenen zwei Punkte verläuft, und dass dabei der erwartete Stichprobenumfang minimal wird. Beim sequentiellen Binomialverfahren erlaubt ein einfaches Maple-Programm, bei beliebig vorgegebenen Schranken die Annahme- und Ablehnwahrscheinlichkeiten exakt zu berechnen; durch Probieren (trial and error) kann man die Schranken so wählen, dass vorgegebene Annahme- bzw. Ablehnwahrscheinlichkeiten erreicht werden. Schließlich können wir bei der Variablenkontrolle mit unbekannter Streuung nicht nur bei der einseitigen sondern auch bei der zweiseitigen Fragestellung eine sinnvolle Lösung anbieten, welche meines Wissens bisher noch nicht vorgeschlagen wurde; die Bestimmung der kritischen Schranke kann mit einer einfachen Simulationsstudie durchgeführt werden. Die Maple-Arbeitsblätter, die im Skript beschrieben sind, finden sich unter [www.stat.uni-muenchen.de/~knuesel](http://www.stat.uni-muenchen.de/~knuesel) bei *Statistische Qualitätskontrolle*.

München, Mai 2004

L. Knüsel

# Inhaltsverzeichnis

1. Einführung.....	1
Typische Aufgaben der statistischen Qualitätskontrolle .....	1
2. Attributenkontrolle, einfache Prüfpläne .....	1
1. Einfacher Prüfplan.....	1
2. Verhalten der OC-Funktion für $n \rightarrow \infty$ .....	2
3. Einfacher Prüfplan mit Vorgabe von zwei Punkten der OC-Funktion .....	3
4. Randomisierte Prüfpläne .....	7
3. Einfache Prüfpläne (Fortsetzung).....	11
1. Philips-Pläne .....	11
2. Totalkontrolle bei Ablehnung .....	12
3. Abgebrochene Kontrolle .....	15
4. Zweistufige Prüfpläne .....	19
1. Struktur eines zweistufigen Prüfplans.....	19
2. Berechnung der OC-Funktion .....	20
3. Durchschnittlicher Prüfumfang .....	20
4. Randomisierte Prüfpläne .....	21
5. Typisches Optimierungsproblem .....	23
5. Sequentielle Verfahren.....	29
1. Einführung.....	29
2. Andere Form des SPRT .....	31
3. Optimalität des SPRT.....	32
4. Ungleichungen zum SPRT .....	33
5. Beispiel eines SPRT, der stets auf dem Rand entscheidet .....	35
6. Stichprobenumfang beim SPRT.....	38
7. Sequentieller Test bei zusammengesetzter Hypothese und Alternative.....	39
8. Sequentieller Test mit einer Bernoulli-Verteilung; numerische Berechnungen.....	42
6. Variablen-Kontrolle, Normalverteilung mit bekannter Varianz .....	48
1. Einseitiger Fall, untere Toleranzgrenze.....	48
2. Einseitiger Fall, obere Toleranzgrenze.....	51
3. Zweiseitige Toleranzgrenzen .....	53
4. Zweiseitige Lösung durch Kombination der einseitigen Lösungen .....	56
7. Variablen-Kontrolle, Normalverteilung mit unbekannter Varianz .....	61
1. Vorbemerkung zur t-Verteilung .....	61
2. Einseitiger Fall, untere Toleranzgrenze.....	62
3. Einseitiger Fall, obere Toleranzgrenze.....	64
4. Zweiseitiger Fall, untere und obere Toleranzgrenze .....	65

8. Variablenkontrolle, verteilungsfreies Verfahren.....	73
1. Einseitiger Fall .....	73
2. Zweiseitiger Fall.....	74
9. Qualitätsregelkarten.....	76
1. Hilfssätze.....	76
2. Bestimmung der Sollwerte.....	77
3. Qualitätsregelkarten bei Variablenprüfung .....	78
4. Kontinuierliche Stichprobenpläne.....	81
Anhang .....	83
A1. Gleichung von Wald .....	83
A2. Nichtzentrale t-Verteilung.....	84
A3. Variablenkontrolle mit unbekannter Varianz, Näherungsformel für $n$ .....	85
A4. Varianz des Zentralwerts .....	87
A5. Erwartungswert des Maximums .....	87
A6. Verteilungsfunktion der Spannweite.....	88
Literatur.....	90

## 1. Einführung

### Typische Aufgaben der statistischen Qualitätskontrolle

a) *Eingangs- und Endkontrolle*

Produzent liefert an Konsumenten (z.B. Schrauben);  
es erfolgt eine vertragliche Einigung auf ein bestimmtes Prüfverfahren.

b) *Laufende Kontrolle*

Bei der Produktion eines Massenartikels (z.B. am Fließband) sollen Abweichungen von der gewünschten Qualität frühzeitig erkannt werden (quality control = Qualitätsüberwachung, Qualitätssteuerung).

Prüfverfahren für qualitative Merkmale: Attributenkontrolle, zählende Prüfung

Prüfverfahren für quantitative Merkmale: Variablenkontrolle, messende Prüfung

## 2. Attributenkontrolle, einfache Prüfpläne

In diesem Abschnitt behandeln wir die Eingangs- und Endkontrolle bei qualitativen Merkmalen (Gut-Schlecht-Prüfung).

### 1. Einfacher Prüfplan

Los mit  $N$  Stücken;

$M$  = unbekannte Anzahl der schlechten (defekten) Stücke im Los;

$p = M/N$  = unbekannter Ausschussanteil im Los;

$n$  Stücke zufällig auswählen (mit oder ohne Zurücklegen);

$X$  = Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe;

$X \sim Bi(n, p)$  im Fall *mit Zurücklegen*;

$X \sim H(N, M, n)$  im Fall *ohne Zurücklegen*;

Los ablehnen, falls  $X > c$  ;

Los annehmen, falls  $X \leq c$  .

$c$  heißt Annahmezahl;

$(n, c)$  legt Prüfplan fest; man spricht hier von einem *einfachen* Prüfplan.

*OC-Funktion, Operationscharakteristik*

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} = \text{Annahmewahrscheinlichkeit als Funktion von } p$$

In der Testtheorie betrachtet man die sogenannte *Gütefunktion*

$$\beta(p) = P_p \{X > c\} = \text{Ablehnwahrscheinlichkeit als Funktion von } p$$

Es gilt also

$$L(p) = 1 - \beta(p).$$

Der Prüfplan  $(n, c)$  soll nun so gewählt werden, dass die OC-Funktion wünschenswerte Eigenschaften besitzt.

## 2. Verhalten der OC-Funktion für $n \rightarrow \infty$

a) *Fall mit Zurücklegen, Binomialverteilung:*

Beim Grenzübergang

$$n, c \rightarrow \infty \text{ und } \frac{c}{n} \rightarrow p_0 \quad (0 < p_0 < 1)$$

gilt

$$L(p) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } p < p_0 \\ 0 & \text{für } p > p_0 \end{cases}$$

denn:

$$X \sim Bi(n, p)$$

$$\frac{X}{n} \xrightarrow{P} p \quad (\text{schwaches Gesetz der großen Zahlen})$$

$$\frac{c}{n} \longrightarrow p_0 \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

und daher gilt

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} = P_p \left\{ \frac{X}{n} \leq \frac{c}{n} \right\} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } p < p_0 \\ 0 & \text{für } p > p_0 \end{cases}$$

b) *Fall ohne Zurücklegen, hypergeometrische Verteilung:*

Beim Grenzübergang

$$N, M, n, c \rightarrow \infty, \frac{M}{N} \rightarrow p \text{ und } \frac{c}{n} \rightarrow p_0 \quad (0 < p_0 < 1)$$

gilt

$$L(p) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } p < p_0 \\ 0 & \text{für } p > p_0 \end{cases}$$

denn:

$$X \sim H(N, M, n)$$

$$\frac{X}{n} \xrightarrow{P} p \quad (\text{plausibel, ohne formalen Beweis})$$

$$\frac{c}{n} \longrightarrow p_0 \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

und daher gilt

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} = P_p \left\{ \frac{X}{n} \leq \frac{c}{n} \right\} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } p < p_0 \\ 0 & \text{für } p > p_0 \end{cases}$$

Anderer Grenzübergang: Falls

$$N, M, c \text{ fest, } p = \frac{M}{N}, p_0 = \frac{c}{N}, n \rightarrow N,$$

so gilt

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } M \leq c \text{ d.h. für } p \leq p_0 \\ 0 & \text{für } M > c \text{ d.h. für } p > p_0 \end{cases}$$

denn im Grenzfall  $n = N$  gilt

$$P\{X = M\} = 1 \quad \text{und} \quad P\{X \neq M\} = 0.$$

**Bemerkung:**

In der Testtheorie spricht man von einem *konsistenten* Test, wenn die Gütefunktion bei wachsendem Stichprobenumfang  $n$  im Bereich der Alternative gegen 1 und im Bereich der Nullhypothese gegen 0 konvergiert. Hier haben wir die entsprechende Eigenschaft für die OC-Funktion bewiesen. Aufgrund der Konsistenz kann man also bei vorgegebener *Trennschärfe* (vgl. unten) der OC-Funktion stets einen Prüfplan finden, der diese Trennschärfe besitzt.

**3. Einfacher Prüfplan mit Vorgabe von zwei Punkten der OC-Funktion**

Gegeben:

$$p_\alpha, p_\beta \text{ mit } 0 < p_\alpha < p_\beta < 1;$$

$$\alpha, \beta \text{ mit } 0 < \beta < \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit

$$L(p_\alpha) \geq \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta.$$

Es sind also zwei Punkte  $(p_\alpha, \alpha)$  und  $(p_\beta, \beta)$  vorgegeben. Diese zwei Punkte bestimmen die *Trennschärfe* des Prüfplans.

*Zur Interpretation:*

$p$  ist der unbekannte Ausschussanteil im Los, und es gilt:

$0 \leq p \leq p_\alpha$ : akzeptable Qualität;

$p_\beta \leq p \leq 1$ : inakzeptable Qualität;

$p_\alpha$  heißt *Annahmegrenze* (AQL = acceptable quality level);

$p_\beta$  heißt *Ablehngrenze* (RQL = rejectable quality level oder LQ = limiting quality oder LPTD = lot tolerance per cent defective).

Der Produzent ist daran interessiert, dass akzeptable Qualität mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen wird; die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  heißt daher *Produzentenrisiko* (= Wahrscheinlichkeit, dass Lose mit akzeptabler Qualität zurückgewiesen werden).

Der Konsument ist daran interessiert, dass inakzeptable Qualität mit grosser Wahrscheinlichkeit zurückgewiesen wird; die Wahrscheinlichkeit  $\beta$  heißt daher *Konsumentenrisiko* (= Wahrscheinlichkeit, dass Lose mit inakzeptabler Qualität angenommen werden).

*Approximationsformeln:*

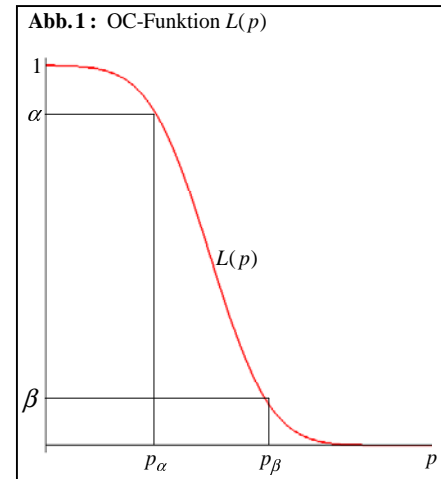
Aus den entsprechenden Formeln für die Gütefunktion in der Testtheorie ergeben sich die folgenden Näherungsformeln für den notwendigen Stichprobenumfang:

a) im Binomialfall: 
$$n \geq \left( \frac{z_\alpha \sqrt{p_\alpha(1-p_\alpha)} + z_{1-\beta} \sqrt{p_\beta(1-p_\beta)}}{p_\beta - p_\alpha} \right)^2 = n_{Bi}$$

b) im hypergeometrischen Fall: 
$$n \geq n_{Bi} \frac{N}{N + n_{Bi}} = n_{Hy}.$$

Die Annahmezahl  $c$  ist dann so zu wählen, dass gilt:

$$P_{p_\alpha} \{X \leq c\} \leq \alpha.$$



**Beispiel**

Maple-Arbeitsblätter zu diesem Beispiel:

- a) Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung): ein\_pp.mws  
 b) Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung): ein\_ppbi.mws

Es sei  $N = 5000$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.1$ . Dann gilt  $z_\alpha = z_{1-\beta} = z_{0.9} = 1.282$  und somit

$$n_{Bi} = \left( \frac{1.282\sqrt{0.01 \times 0.99} + 1.282\sqrt{0.03 \times 0.97}}{0.03 - 0.01} \right)^2 = 299.75 \approx 300;$$

$$n_{Hy} = 300 \frac{5000}{5000 + 300} = 283.02 \approx 283.$$

Aufgrund der folgenden Tabellen ergibt sich in beiden Fällen die Annahmezahl  $c = 5$ .

**Tabelle 1:**  $X \sim H(N, M, n)$

mit  $N = 5000$ ,  $M = 50$ ,  $n = 300$

$c$	$P\{X \leq c\}$
4	0.854
5	0.941

**Tabelle 2:**  $X \sim Bi(n, p)$

mit  $n = 300$ ,  $p = 0.01$

$c$	$P\{X \leq c\}$
4	0.816
5	0.917

Somit ergeben sich die folgenden *Näherungslösungen*.

- a) Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):  
 $n = 283$ ,  $c = 5$ . Dann ist  $L(p_\alpha) = 0.939$  und  $L(p_\beta) = 0.139$ .
- b) Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung):  
 $n = 300$ ,  $c = 5$ . Dann ist  $L(p_\alpha) = 0.917$  und  $L(p_\beta) = 0.112$ .

*Exakte Lösung:*

Die Tabellen 3 und 4 zeigen in Spalte 4 und 5, dass die OC-Funktion  $L(p)$  bei gegebenem  $c$  und  $p$  abnimmt bei wachsendem  $n$ , und dass sie bei gegebenem  $n$  und  $p$  zunimmt, wenn  $c$  vergrößert wird. Die Spalten 4 und 5 weisen daher ein Sägezahnverhalten auf, und die exakte Lösung bekommt die seltsame Form:

- a) Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):

Unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) \geq 0.9$  gilt  $L(p_\beta) \leq 0.1$  für  $303 \leq n \leq 322$ , sowie für  $n \geq 344$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 303$  und  $c = 5$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.9204$  und  $L(p_\beta) = 0.0995$ .

- b) Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung):

Unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) \geq 0.9$  gilt  $L(p_\beta) \leq 0.1$  für  $308 \leq n \leq 316$ , sowie für  $n \geq 349$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 308$  und  $c = 5$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.9088$  und  $L(p_\beta) = 0.0984$ .

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass *randomisierte* Prüfpläne natürlichere und schönere Lösungen ermöglichen.

Exakte Lösung im hypergeometrischen Fall (ohne Zurücklegen)

$$X \sim H(N, M, n), \quad N = 5000, \quad p = M/N;$$

Gegeben:

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.03 \quad \beta = 0.1$$

Gesucht:

Einfacher Prüfplan  $(n, c)$  mit  $L(p_\alpha) \geq \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$ , wobei

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} = \text{OC-Funktion}.$$

Es sei  $(n, c, \delta)$  mit  $0 < \delta < 1$  ein randomisierter Prüfplan mit der OC-Funktion

$$\tilde{L}(p) = P_p \{X < c\} + (1 - \delta)P_p \{X = c\} = P_p \{X \leq c\} - \delta P_p \{X = c\}.$$

**Tabelle 3:** Werte der OC-Funktion des gewöhnlichen und randomisierten Prüfplans (ein\_pp.mws)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$n$	$c$	$\delta$	$L(p_\alpha)$	$L(p_\beta)$	$\tilde{L}(p_\alpha)$	$\tilde{L}(p_\beta)$
230	4	0.1855	0.92197	0.17171	0.90000	0.15451
240	4	0.0795	0.91014	0.14500	0.90000	0.13859
248	4	0.0002	0.90003	0.12618	0.90000	0.12616
249	5	0.9803	0.96364	0.23365	0.90000	0.12613
250	5	0.9605	0.96302	0.23031	0.90000	0.12609
260	5	0.7773	0.95650	0.19876	0.90000	0.12340
270	5	0.6168	0.94928	0.17061	0.90000	0.11762
280	5	0.4743	0.94136	0.14570	0.90000	0.10986
290	5	0.3461	0.93273	0.12381	0.90000	0.10098
291	5	0.3340	0.93182	0.12178	0.90000	0.10006
292	5	0.3220	0.93091	0.11978	0.90000	0.09913
300	5	0.2294	0.92337	0.10472	0.90000	0.09160
301	5	0.2183	0.92239	0.10296	0.90000	0.09065
302	5	0.2072	0.92141	0.10122	0.90000	0.08970
303	5	0.1963	0.92042	0.09950	0.90000	0.08876
310	5	0.1218	0.91329	0.08817	0.90000	0.08217
320	5	0.0215	0.90250	0.07392	0.90000	0.07301
322	5	0.0022	0.90026	0.07132	0.90000	0.07123
323	6	0.9857	0.96005	0.13836	0.90000	0.07103
343	6	0.6558	0.94754	0.10099	0.90000	0.06657
344	6	0.6412	0.94685	0.09937	0.90000	0.06618
399	6	0.0019	0.90020	0.03833	0.90000	0.03828
400	7	0.9860	0.95704	0.07751	0.90000	0.03819

*Randomisierter Prüfplan:*

Unter der Nebenbedingung  $\tilde{L}(p_\alpha) = \alpha = 0.9$  gilt  $\tilde{L}(p_\beta) \leq \beta = 0.1$  für  $n \geq 292$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 292$ ,  $c = 5$  und  $\delta = 0.3220$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.90000$  und  $L(p_\beta) = 0.09913$ .

*Gewöhnlicher (nicht-randomisierter) Prüfplan:*

Unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) \geq \alpha = 0.9$  gilt  $L(p_\beta) \leq \beta = 0.1$  für  $303 \leq n \leq 322$ , sowie für  $n \geq 344$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 303$  und  $c = 5$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.92042$  und  $L(p_\beta) = 0.09950$ .

Exakte Lösung im Binomialfall (mit Zurücklegen)

$$X \sim \text{Bi}(n, p)$$

Gegeben:

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.03 \quad \beta = 0.1$$

Gesucht: Einfacher Prüfplan  $(n, c)$  mit

$$L(p_\alpha) \geq \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta,$$

wobei

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} = \text{OC-Funktion}.$$

Es sei  $(n, c, \delta)$  mit  $0 < \delta < 1$  ein *randomisierter* Prüfplan mit der OC-Funktion

$$\tilde{L}(p) = P_p \{X < c\} + (1 - \delta)P_p \{X = c\} = P_p \{X \leq c\} - \delta P_p \{X = c\}.$$

**Tabelle 4:** Werte der OC-Funktion des gewöhnlichen und randomisierten Prüfplans (ein\_ppbi.mws)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$n$	$c$	$\delta$	$L(p_\alpha)$	$L(p_\beta)$	$\tilde{L}(p_\alpha)$	$\tilde{L}(p_\beta)$
300	5	0.1693	0.91710	0.11202	0.90000	0.10193
301	5	0.1582	0.91609	0.11023	0.90000	0.10093
302	5	0.1473	0.91507	0.10847	0.90000	0.09993
303	5	0.1363	0.91405	0.10673	0.90000	0.09893
304	5	0.1255	0.91302	0.10501	0.90000	0.09794
305	5	0.1148	0.91198	0.10332	0.90000	0.09694
306	5	0.1041	0.91094	0.10165	0.90000	0.09595
307	5	0.0935	0.90989	0.10001	0.90000	0.09495
308	5	0.0830	0.90883	0.09839	0.90000	0.09396
316	5	0.0012	0.90013	0.08621	0.90000	0.08615
317	6	0.9833	0.95802	0.16013	0.90000	0.08604
348	6	0.4898	0.93720	0.10122	0.90000	0.07599
349	6	0.4763	0.93645	0.09968	0.90000	0.07546
390	6	0.0053	0.90053	0.05154	0.90000	0.05139
391	7	0.9916	0.95491	0.09850	0.90000	0.05108

*Randomisierter Prüfplan:*

Unter der Nebenbedingung  $\tilde{L}(p_\alpha) = \alpha = 0.9$  gilt  $\tilde{L}(p_\beta) \leq \beta = 0.1$  für  $n \geq 302$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 302$ ,  $c = 5$  und  $\delta = 0.1473$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.90000$  und  $L(p_\beta) = 0.09893$ .

*Gewöhnlicher (nicht-randomisierter) Prüfplan:*

Unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) \geq \alpha = 0.9$  gilt  $L(p_\beta) \leq \beta = 0.1$  für  $308 \leq n \leq 316$ , sowie für  $n \geq 349$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 308$  und  $c = 5$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.90883$  und  $L(p_\beta) = 0.09839$ .

#### 4. Randomisierte Prüfpläne

In der Testtheorie werden randomisierte Tests eingeführt, um bei diskreter Testgröße mehr Spielraum für die Testentscheidungen zu gewinnen.

##### Beispiel

In einer Urne befinden sich drei Kugeln, entweder zwei weiße und eine schwarze Kugel ( $H_0$ ) oder eine weiße und zwei schwarze Kugeln ( $H_1$ ). Man darf zwei Kugeln zufällig auswählen (ohne Zurücklegen) und soll dann entscheiden, ob der Fall  $H_0$  oder  $H_1$  vorliegt. Die folgende Tabelle listet die drei möglichen Stichprobenergebnisse mit den zugehörigen vernünftigen Entscheidungen auf.

Stichprobe	$H_0$ oder $H_1$ ?
(w, w)	$H_0$
(s, s)	$H_1$
(w, s)	???

Beim Stichprobenergebnis (w, s) sind beide Fälle  $H_0$  und  $H_1$  möglich, und aus Symmetriegründen kann es hier sinnvoll sein, die Entscheidung nicht im Voraus eindeutig festzulegen, sondern z.B. eine Münze zu werfen, und die Entscheidung vom Ausgang dieses zusätzlichen Experiments abhängig zu machen. Dabei entscheide ich mich also beim Stichprobenergebnis (w, s) mit Wahrscheinlichkeit 0.5 für  $H_0$  und mit Wahrscheinlichkeit 0.5 für  $H_1$ . Man spricht dann von einem *randomisierten* Entscheidungsverfahren oder einem randomisierten Test.

Ein *randomisierter Prüfplan* ist charakterisiert durch  $(n, c, \delta)$ , wobei  $0 \leq \delta < 1$ . Wenn  $X$  die Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe bezeichnet, so gilt die folgende Entscheidungsregel:

falls  $X < c$ : Los annehmen;

falls  $X > c$ : Los ablehnen;

falls  $X = c$ : Los ablehnen mit Wahrscheinlichkeit  $\delta$  und annehmen mit W'keit  $1 - \delta$ .

Für  $\delta = 0$  ist der randomisierte Prüfplan  $(n, c, \delta)$  äquivalent zum gewöhnlichen Prüfplan  $(n, c)$ .

Die OC-Funktion des randomisierten Prüfplans lautet

$$L(p) = \text{Annahmewahrscheinlichkeit als Funktion von } p \\ = P_p \{X < c\} + (1 - \delta) P_p \{X = c\} = P_p \{X \leq c\} - \delta P_p \{X = c\}$$

Mit Hilfe von randomisierten Prüfplänen  $(n, c, \delta)$  können wir unsere Anforderungen an die OC-Funktion verschärfen, da wir ja durch die zusätzliche stetige Variable  $\delta$  mehr Spielraum haben.

##### Variante A

Gesucht: Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$ .

Die Lösung dieses Problems lässt sich wie folgt finden. Bei gegebenem  $n$  und  $c$  ist  $\delta$  so zu wählen, dass  $L(p_\alpha) = \alpha$  ist; daraus ergibt sich

$$\delta = \frac{P_{p_\alpha} \{X \leq c\} - \alpha}{P_{p_\alpha} \{X = c\}}.$$

$L(p_\beta)$  ist dann als Funktion von  $n$  monoton abnehmend, und somit ist der kleinste Wert von  $n$  mit  $L(p_\beta) \leq \beta$  leicht zu finden.

Im Beispiel der Tabellen 3 und 4 zeigen die Spalten 6 und 7, dass unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) = \alpha$  der Wert  $L(p_\beta)$  monoton abnimmt als Funktion von  $n$ ; es ergeben sich daher die nachfolgenden einfachen Lösungen:

- a) Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):

Unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) = 0.9$  gilt  $L(p_\beta) \leq 0.1$  für  $n \geq 292$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 292$ ,  $c = 5$  und  $\delta = 0.3220$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.90000$  und  $L(p_\beta) = 0.09913$ .

- b) Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung):

Unter der Nebenbedingung  $L(p_\alpha) = 0.9$  gilt  $L(p_\beta) \leq 0.1$  für  $n \geq 302$ . Die Lösung mit dem kleinsten Stichprobenumfang  $n$  ist gegeben durch  $n = 302$ ,  $c = 5$  und  $\delta = 0.1473$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = 0.90000$  und  $L(p_\beta) = 0.09993$ .

### Variante B

Gesucht: Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit  $1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta)$ . Bei diesem Prüfplan ist das *Produzentenrisiko*  $1 - L(p_\alpha)$  gleich dem *Konsumentenrisiko*  $L(p_\beta)$  (symmetrische Lösung). Die Lösung dieses Problems läßt sich wie folgt finden. Bestimme den Prüfplan  $(n, c, \delta)$  gemäß A mit minimalem  $n$ . Löse dann für das Paar  $(n, c)$  die Gleichung  $1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta)$  nach  $\delta$ . Diese Gleichung kann geschrieben werden als

$$1 - P_{p_\alpha} \{X \leq c\} + \delta P_{p_\alpha} \{X = c\} = P_{p_\beta} \{X \leq c\} - \delta P_{p_\beta} \{X = c\},$$

und daraus ergibt sich

$$\delta = \frac{P_{p_\alpha} \{X \leq c\} + P_{p_\beta} \{X \leq c\} - 1}{P_{p_\alpha} \{X = c\} + P_{p_\beta} \{X = c\}}.$$

Im Beispiel der Tabellen 3 und 4 finden wir die folgenden Lösungen:

- a) Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):

Die Lösung zu Fall A mit minimalem  $n$  ist gegeben durch  $(n, c, \delta) = (292, 5, 0.3220)$ . Somit ergibt sich für die symmetrische Lösung der folgende Wert von  $\delta$ :

$$\delta = \frac{P_{p_\alpha} \{X \leq c\} + P_{p_\beta} \{X \leq c\} - 1}{P_{p_\alpha} \{X = c\} + P_{p_\beta} \{X = c\}} = \frac{0.93091 + 0.11976 - 1}{0.09601 + 0.06415} = \frac{0.05067}{0.16016} = 0.3165.$$

Es ist dann  $L(p_\beta) = 1 - L(p_\alpha) = 0.09948$ .

- b) Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung):

Die Lösung zu Fall A mit minimalem  $n$  ist gegeben durch  $(n, c, \delta) = (302, 5, 0.1473)$ . Somit ergibt sich für die symmetrische Lösung der folgende Wert von  $\delta$ :

$$\delta = \frac{P_{p_\alpha} \{X \leq c\} + P_{p_\beta} \{X \leq c\} - 1}{P_{p_\alpha} \{X = c\} + P_{p_\beta} \{X = c\}} = \frac{0.91507 + 0.10847 - 1}{0.10234 + 0.05797} = 0.1468.$$

Es ist dann  $L(p_\beta) = 1 - L(p_\alpha) = 0.09996$ .

Maple-Arbeitsblatt ein\_pp.mws

```

> #
  # Einfache Prüfpläne (Attribut-Kontrolle),
  # gewöhnliche, randomisierte und symmetrische Version
  # mit hypergeometrischer Verteilung (ohne Zurücklegen)
  #
> restart;
> #
  # Näherungsformel für notwendigen Stichprobenumfang
  #
> N := 5000;
> p_alpha := 0.01;
> p_beta := 0.03;
> alpha := 0.9;
> beta := 0.1;
> # Verteilungsfunktion zu N(0,1)
Phi := z -> 0.5+0.5*erf(z/sqrt(2.0));
> # komplementäre Verteilungsfunktion zu N(0,1)
Phic := z -> 0.5*erfc(z/sqrt(2.0));
> z_alpha := fsolve(Phic(z)=1-alpha,z);
> z_lminbeta := fsolve(Phic(z)=beta,z);
> n_Bi := ((z_alpha*sqrt(p_alpha*(1-p_alpha))
          +z_lminbeta*sqrt(p_beta*(1-p_beta)))/(p_beta-p_alpha))^2;
> # n_Bi runden zu ganzer Zahl
n_Bi := 300.;
> n_Hy := n_Bi*N/(N+n_Bi);
> #
  # Exakte Lösung
  #
> # Hypergeometrische Verteilung H(N,M,n)
  # hyp(M,k) = Pr{H(N,M,n) = k}
  # Hyp(M,k) = Pr{H(N,M,n) <= k}
> hyp := (M,k) -> binomial(M,k)*binomial(N-M,n-k)/binomial(N,n);
> Hyp := (M,k) -> sum(hyp(M,j),j=0..k);
> #
  # Randomisierter Prüfplan (n,c,delta)
  # mit L(M_alpha) = alpha und L(M_beta) <= beta
  # c = kleinste ganze Zahl mit Hyp(M_alpha,c) >= alpha
  # delta so wählen, dass L(M_alpha) = alpha
> L := M -> Hyp(M,c) - delta*hyp(M,c);
> # M_alpha = p_alpha*N (als Integerzahl!)
M_alpha := p_alpha*N;
> M_alpha := convert(%,rational);
> # M_beta = p_beta*N (als Integerzahl!)
M_beta := p_beta*N;
> M_beta := convert(%,rational);
> n:=292;
> c:=5;
> delta := evalf((Hyp(M_alpha,c)-alpha)/hyp(M_alpha,c));
> evalf(L(M_alpha));
> evalf(L(M_beta));
> #
  # Symmetrische Lösung: 1-L(M_alpha) = L(M_beta)
> delta := evalf((Hyp(M_alpha,c)+Hyp(M_beta,c)-1)
                /((hyp(M_alpha,c)+hyp(M_beta,c))));
> # Kontrolle
> L(M_alpha,c);
> L(M_beta,c);
> 1-L(M_alpha,c);
> #
  # Gewöhnlicher Prüfplan (n,c)
  # mit L(M_alpha) >= alpha und L(M_beta) <= beta
  # c = kleinste ganze Zahl mit L(M_alpha) >= alpha
> # OC-Funktion als Funktion von M
L := M -> Hyp(M,c);
> n:=292;
> c:=5;
> evalf(L(M_alpha));
> evalf(L(M_beta));
>

```

Maple-Arbeitsblatt ein\_ppbi.mws

```

> #
  # Einfache Prüfpläne (Attribut-Kontrolle)
  # gewöhnliche, randomisierte und symmetrische Version
  # mit Binomialverteilung (mit Zurücklegen)
  #
> restart;
> #
  # Näherungsformel für notwendigen Stichprobenumfang
  #
> p_alpha := 0.01;
> p_beta := 0.03;
> alpha := 0.9;
> beta := 0.1;
> #Verteilungsfunktion zu N(0,1)
  Phi := z -> 0.5+0.5*erf(z/sqrt(2.0));
> # komplementäre Verteilungsfunktion zu N(0,1)
  Phic := z -> 0.5*erfc(z/sqrt(2.0));
> z_alpha := fsolve(Phic(z)=1-alpha,z);
> z_lminbeta := fsolve(Phic(z)=beta,z);
> n_Bi := ((z_alpha*sqrt(p_alpha*(1-p_alpha))
           + z_lminbeta*sqrt(p_beta*(1-p_beta)))/(p_beta-p_alpha))^2;
> #
  # Exakte Lösung
  #
> # Binomialverteilung Bi(n,p)
  # bin(k) = Pr{Bi(n,k) = k}
  # Bin(k) = Pr{Bi(n,k) <= k}
> bin := (p,k) -> binomial(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k);
> Bin := (p,k) -> sum(bin(p,j),j=0..k);
> #
  # Randomisierter Prüfplan (n,c,delta)
  # mit L(p_alpha) = alpha und L(p_beta) <= beta
  # c = kleinste ganze Zahl mit Bin(p_alpha,c) >= alpha
  # delta so wählen, dass L(p_alpha) = alpha
> L := p -> Bin(p,c) - delta*bin(p,c);
> p:=p_alpha;
> n:=302;
> c:=5;
> delta := evalf((Bin(p,c)-alpha)/bin(p,c));
> L(p_alpha);
> L(p_beta);
> #
  # Symmetrische Lösung: 1-L(p_alpha) = L(p_beta)
> delta := (Bin(p_alpha,c)+Bin(p_beta,c)-1)/(bin(p_alpha,c)+bin(p_beta,c));
> # Kontrolle
> L(p_alpha);
> L(p_beta);
> 1-L(p_alpha);
> #
  # Gewöhnlicher Prüfplan (n,c) mit
  # L(p_alpha) >= alpha und L(p_beta) <= beta
> L := p -> Bin(p,c);
> n:=302;
> # c = kleinste ganze Zahl mit L(p_alpha) >= alpha
> c:=5;
> L(p_alpha);
> L(p_beta);
>

```

### 3. Einfache Prüfpläne (Fortsetzung)

Im vorangehenden Kapitel haben wir einfache Prüfpläne untersucht, bei denen die OC-Kurve durch zwei vorgegebene Punkte festgelegt ist. In diesem Kapitel beschreiben wir die sogenannten *Philips-Pläne*, und wir untersuchen einfache Prüfpläne mit *Totalkontrolle bei Ablehnung*, sowie Pläne mit *abgebrochener Kontrolle*.

#### 1. Philips-Pläne

Die Anfänge der statistischen Qualitätskontrolle waren geprägt durch die folgenden beiden Standardwerke:

Harold F. Dodge and Harry G. Romig. Sampling Inspection Tables. Single and Double Sampling. First Edition 1944, Second Edition 1959, 224p. Wiley New York.  
 Military Standard. Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes. MIL-STD-105C, 1961; MIL-STD-105D, 1963, 64p. Department of Defense, USA.

Die beiden Werke enthalten umfangreiche Tabellen und Nomogramme zur Bestimmung von einfachen und mehrstufigen Prüfplänen. Bei der Vorgabe von zwei Punkten der OC-Kurve hat man vier Parameter  $(p_\alpha, \alpha)$  und  $(p_\beta, \beta)$ , welche einen Prüfplan festlegen. Bei Philips-Plänen genügen zwei Parameter zur Festlegung eines Prüfplans, nämlich die Lage des Indifferenzpunktes und die Steigung im Indifferenzpunkt.

*Ausgangssituation:*

Los mit  $N$  Stücken;

$M$  = unbekannte Anzahl der schlechten (defekten) Stücke;

$p = M/N$  = unbekannter Ausschussanteil;

$n$  Stücke zufällig auswählen (mit oder ohne Zurücklegen);

$X$  = Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe;

$X \sim Bi(n, p)$  mit  $p = M/N$  im Fall *mit Zurücklegen*;

$X \sim H(N, M, n)$  im Fall *ohne Zurücklegen*;

Los ablehnen, falls  $X > c$  ;

Los annehmen, falls  $X \leq c$  .

OC-Funktion zum einfachen Prüfplan  $(n, c)$  :

$$L(p) = P_p \{X \leq c\} = \text{Annahmewahrscheinlichkeit als Funktion von } p .$$

Indifferenzpunkt  $p_{0.5}$  :

$$p_{0.5} \text{ so: } L(p_{0.5}) = \frac{1}{2} .$$

Beim Ausschussanteil  $p_{0.5}$  ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme des Loses ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung, nämlich je 50%. Daher heißt  $p_{0.5}$  der *Indifferenzpunkt* der OC-Funktion (IQL = indifferent quality level). Die Ableitung der OC-Kurve im Indifferenzpunkt legt nun die Trennschärfe des Prüfplans fest; je steiler die Kurve abfällt im Indifferenzpunkt, desto größer ist die Trennschärfe (vgl. Abb 1). Anstelle der Ableitung kann man auch die sogenannte *Elastizität*  $h_0$  betrachten:

$$h_0 = \frac{p_{0.5} L'(p_{0.5})}{L(p_{0.5})} = 2 p_{0.5} L'(p_{0.5}) .$$

Beim *Philips-Standard-Stichprobensystem* wird nun die folgende Aufgabe gestellt:

Vorgegeben:  $N =$  Losumfang;

$p_{0,5} =$  Indifferenzpunkt (IQL = indifferent quality level);

$h_0 =$  Elastizität im Punkt  $p_{0,5}$ .

Gesucht: Einfacher Prüfplan  $(n, c)$ , dessen OC-Kurve den vorgegebenem Indifferenzpunkt  $p_{0,5}$  und die vorgegebene Elastizität  $h_0$  im Punkt  $p_{0,5}$  besitzt.

Bei diesem System legen die beiden Parameter  $p_{0,5}$  und  $h_0$  einen Prüfplan fest; die zugehörige Tabellensammlung kann somit viel einfacher ausfallen als bei der Vorgabe von zwei Punkten der OC-Kurve (vier Parameter). Da wir heute unsere Prüfpläne mit Hilfe des Computers bestimmen und nicht mehr mit Hilfe von Tabellen und Nomogrammen, und da die Interpretation bei der Vorgabe von zwei Punkten natürlicher und einfacher ist als bei den Philips-Plänen, so sind diese Pläne heute nach meiner Meinung überholt.

## 2. Totalkontrolle bei Ablehnung

Wir betrachten die gleiche Ausgangssituation wie oben mit der zusätzlichen Annahme, dass bei einem Los, das zurückgewiesen wird, jedes Stück geprüft wird, und dass alle defekten Stücke durch gute ersetzt werden. Der Konsument bekommt also in diesem Fall ein Los mit lauter guten Stücken. Man spricht dann von *Totalkontrolle bei Ablehnung*. Dieses Prüfverfahren ist natürlich nicht möglich, wenn bei der Prüfung auf Funktionstüchtigkeit das Prüfaxemplar zerstört wird (zerstörende Prüfung, destructive inspection).

Eine verfeinerte Variante des obigen Prüfverfahrens besteht darin, dass nicht nur bei der Totalkontrolle alle defekten Stücke durch gute ersetzt werden, sondern dass dies auch bei der Stichprobenkontrolle geschieht. Dies macht die Berechnungen komplizierter ohne die Ergebnisse wesentlich zu ändern, und wir begnügen uns daher mit der Untersuchung der einfacheren Variante.

Es sei  $\hat{p}$  der Ausschussanteil nach der Kontrolle.  $\hat{p}$  ist eine Zufallsgröße, und es gilt

$$\hat{p} = \begin{cases} p & \text{bei Annahme des Loses,} \\ 0 & \text{bei Ablehnung des Loses.} \end{cases}$$

Wir nehmen nun weiter an, dass die Lose mit einem konstanten Ausschussanteil  $p$  geliefert werden, und wir interessieren uns für den durchschnittlichen Ausschussanteil nach der Kontrolle. Es gilt

$$E_p(\hat{p}) = p \times P\{\hat{p} = p\} + 0 \times P\{\hat{p} = 0\} = p \times P\{\text{Los wird angenommen}\} = pL(p).$$

Der Erwartungswert  $E_p(\hat{p})$  heißt *mittlerer Durchschlupf* (AOQ = average outgoing quality), und die AOQ-Funktion ist definiert als

$$AOQ(p) = E_p(\hat{p}) = pL(p).$$

Die vorstehenden Formel gelten auch für einen randomisierten Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit der entsprechenden OC-Funktion. Für den Konsumenten ist nun das Maximum der AOQ-Funktion wichtig:

$$\pi^* = \max_{0 \leq p \leq 1} AOQ(p) = \max_{0 \leq p \leq 1} pL(p).$$

Der Wert  $\pi^*$  heißt *Höchstwert des mittleren Durchschlupfs* oder *maximaler mittlerer Durchschlupf* (AOQL = average outgoing quality limit). Da die AOQ-Funktion offensichtlich gegen Null konvergiert für  $p \rightarrow 0$  und auch für  $p \rightarrow 1$  (denn es erfolgt dann sehr oft eine Totalkontrolle, welche zu einem einwandfreien Los führt), so ist es ist plausibel, dass diese Funktion unimodal ist mit einem eindeutigen Maximum. Wir verzichten auf einen Beweis dieser Behauptung und begnügen uns mit der Bestätigung in unseren Beispielen.

Ein weiteres sinnvolles Konzept zur Bestimmung von Prüfplänen mit wünschenswerten Eigenschaften ist nun das Folgende:

Gegeben:  $N, p_\alpha, \alpha, \pi_{\max}$

Gesucht: Ein einfacher Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit der OC-Funktion  $L(p)$  so, dass

- 1)  $L(p_\alpha) = \alpha$ ,
- 2)  $\max_{0 \leq p \leq 1} pL(p) (= AOQL) \leq \pi_{\max}$ .

*Beispiel:* Es sei  $N = 5000, p_\alpha = 0.01, \alpha = 0.9, \pi_{\max} = 0.02$

Mit Hilfe des Maple-Arbeitsblattes `ein_pp1.mws` finden wir die Werte in Tabelle 5, und als Lösung unserer Aufgabe erhalten wir den Prüfplan  $(n, c, \delta) = (37, 1, 0.1841)$ . Es ist dann  $L(p_\alpha) = \alpha = 0.9$ , und der Höchstwert des mittleren Durchschlupfs beträgt  $\pi^* = 0.01992 (\leq 0.02 = \pi_{\max})$ . Der Maximalwert wird erreicht für  $p = p^* = M^*/N = 205/5000 = 0.0410$ .

**Tabelle 5:** Randomisierte Prüfpläne  $(n, c, \delta)$  mit OC-Funktion  $L(p)$ ;

$$\pi^* = \max_{0 \leq p \leq 1} pL(p) = p^*L(p^*) \text{ mit } p^* = M^*/N = \text{Maximalstelle.}$$

$n$	$c$	$\delta$	$L(p_\alpha)$	$M^*$	$p^*$	$ATI(p^*)$	$\pi^*$
400	7	0.9860	0.90000	63	0.0126	1481.2	0.00964
350	6	0.5562	0.90000	66	0.0132	1528.0	0.00986
300	5	0.2294	0.90000	69	0.0138	1569.6	0.01007
250	5	0.9605	0.90000	73	0.0146	1651.6	0.0103
200	4	0.5762	0.90000	81	0.0162	1780.5	0.01087
150	3	0.3014	0.90000	91	0.0182	1893.0	0.01166
100	2	0.1206	0.90000	109	0.0218	2088.8	0.01295
50	1	0.0369	0.90000	157	0.0314	2432.6	0.01629
40	1	0.1468	0.90000	192	0.0384	2556.4	0.01892
37	1	0.1841	0.90000	205	0.0410	2588.2	0.01992
36	1	0.1972	0.90000	210	0.0420	2602.2	0.02029

#### *Prüfumfang bei Totalkontrolle bei Ablehnung*

Wir interessieren uns jetzt für den Prüfumfang, wenn die Prüfung mit *Totalkontrolle bei Ablehnung* erfolgt. Es sei  $\hat{n}$  die Anzahl der geprüften Stücke.  $\hat{n}$  ist eine Zufallsgröße, und es gilt

$$\hat{n} = \begin{cases} n & \text{bei Annahme des Loses,} \\ N & \text{bei Ablehnung des Loses.} \end{cases}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} E_p(\hat{n}) &= n P_p \{ \text{Annahme des Loses} \} + N P_p \{ \text{Ablehnung des Loses} \} \\ &= nL(p) + N(1 - L(p)) = N - (N - n)L(p). \end{aligned}$$

Der Erwartungswert der Zufallsgröße  $\hat{n}$  wird auch bezeichnet als *durchschnittlicher Prüfumfang* oder als ATI (= average total inspected):

$$ATI(p) = N - (N - n)L(p).$$

Eigenschaften der Funktion  $ATI(p)$ :

- 1)  $ATI(p)$  ist wachsend in  $p$ , denn

$$\frac{d}{dp}ATI(p) = -(N-n)L'(p) > 0, \text{ da ja } L'(p) < 0.$$

- 2) Offensichtlich gilt

$$ATI(p) \longrightarrow \begin{cases} n & \text{für } p \rightarrow 0 \\ N & \text{für } p \rightarrow 1, \end{cases}$$

denn für  $p=0$  erfolgt stets eine Stichprobenkontrolle vom Umfang  $n$ , und für  $p=1$  erfolgt stets eine Totalkontrolle mit Umfang  $N$ .

Maple-Arbeitsblatt ein\_pp1.mws

```
> #
# Einfache Prüfpläne mit Totalkontrolle bei Ablehnung
# mit hypergeometrischer Verteilung (ohne Zurücklegen);
# Gesucht: randomisierter Prüfplan (n,c,delta)
# mit Vorgabe von (alpha,p_alpha) und AOQL-Schranke;
# Berechnung des mittleren Durchschlupfs (AOQ-Funktion)
# sowie des durchschnittlichen Prüfumfangs (ATI-Funktion).
#
> restart;
> N := 5000;
> p_alpha := 0.01;
> # M_alpha = N*p_alpha (als Integerzahl!)
M_alpha := N*p_alpha;
> M_alpha := convert(M_alpha,rational);
> alpha := 0.9;
> # Hypergeometrische Verteilung H(N,M,n)
# hyp(M,k) = Pr{H(N,M,n) = k}
# Hyp(M,k) = Pr{H(N,M,n) <= k}
> hyp := (M,k) -> binomial(M,k)*binomial(N-M,n-k)/binomial(N,n);
> Hyp := (M,k) -> sum(hyp(M,j),j=0..k);
> # L1(M) = OC-Funktion als Funktion von M
L1 := M -> Hyp(M,c) - delta*hyp(M,c);
> # Randomisierter Prüfplan (n,c,delta) mit L1(M_alpha) = alpha
# c = kleinste ganze Zahl mit Hyp(M_alpha,c) >= alpha
# delta so wählen, dass L(M_alpha) = alpha
> n:=37;
> c:=1;
> delta := evalf((Hyp(M_alpha,c)-alpha)/hyp(M_alpha,c));
> evalf(L1(M_alpha));
> # AOQ-Funktion als Funktion von M:
AOQ := M -> (M/N)*L1(M);
> # Maximum der AOQ-Funktion
> for M from 200 to 210 do
print(M,AOQ(M));
end do;
> # ATI-Funktion als Funktion von M:
ATI := M -> N-(N-n)*L1(M);
> M:=205;
> L1(M);
> ATI(M);
>
```

### 3. Abgebrochene Kontrolle

Wir betrachten die gleiche Ausgangssituation wie zu Beginn dieses Kapitels, und wir wollen hier annehmen, dass die zu prüfenden Stücke zeitlich nacheinander geprüft werden. Dann ist es natürlich sinnvoll, die Prüfung abzubrechen, sobald die endgültige Entscheidung eindeutig feststeht. Dies bedeutet bei einem einfachen Prüfplan  $(n, c)$ :

- Prüfung abbrechen, sobald mehr als  $c$  schlechte Stücke gefunden sind; dann muss das Los in jedem Fall abgelehnt werden.
- Prüfung abbrechen, sobald mindestens  $n - c$  gute Stücke gefunden sind; dann kann man höchstens noch  $c$  schlechte Stücke finden, und das Los ist somit in jedem Fall anzunehmen.

Wir werden im Folgenden nur den Fall a) untersuchen; da die Annahmezahl  $c$  meist klein ist, ist die Einsparung an Prüfkosten im Fall b) gering.

Es sei  $(n, c)$  ein einfacher Prüfplan.

Bei *vollständiger Kontrolle* gilt folgende Entscheidungsregel:

$X$  = Anzahl der defekten Stücke in der Stichprobe vom Umfang  $n$ ;  
falls  $X \leq c$ : Los annehmen;  
falls  $X > c$ : Los ablehnen.

Bei *abgebrochener Kontrolle* gilt folgende Entscheidungsregel:

$X_i$  = Anzahl der defekten Stücke unter den ersten  $i$  geprüften Stücke ( $i = 1, \dots, n$ );  
sobald  $X_i > c$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ : Los ablehnen;  
falls  $X_n \leq c$  (d.h. falls alle  $X_i \leq c$ ): Los annehmen.

Die OC-Funktion bei *abgebrochener Kontrolle* ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(p) &= \text{Annahmewahrscheinlichkeit als Funktion von } p \\ &= P_p \{X_n \leq c\}. \end{aligned}$$

Bei *abgebrochener Kontrolle* haben wir also die gleiche OC-Funktion wie bei *vollständiger Kontrolle*. Von besonderem Interesse bei abgebrochener Kontrolle ist der reduzierte Prüfumfang. Wir betrachten nun einen Prüfplan  $(n, c)$  mit abgebrochener Kontrolle, und es sei  $\hat{n}$  die Anzahl der geprüften Stücke.  $\hat{n}$  ist eine Zufallsgröße, und wir interessieren uns für den Erwartungswert dieser Zufallsgröße.

Es gelten die folgenden Beziehungen:

- im Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):

$$E_p(\hat{n}) = \frac{(c+1)(N+1)}{M+1} P\{X_+ > c+1\} + n P\{X \leq c\},$$

wobei  $X \sim H(N, M, n)$  und  $X_+ \sim H(N+1, M+1, n+1)$ .

- im Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung):

$$E_p(\hat{n}) = \frac{(c+1)}{p} P\{X_+ > c+1\} + n P\{X \leq c\},$$

wobei  $X \sim Bi(n, p)$  und  $X_+ \sim Bi(n+1, p)$ .

*Beweis:*

Wir betrachten zunächst den Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung). Es sei

$$A_i = \{\text{Ablehnung genau im Schritt } i\} = \{X_{i-1} = c, X_i - X_{i-1} = 1\}, \quad i = c+1, \dots, n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{\binom{M}{c} \binom{N-M}{i-1-c}}{\binom{N}{i-1}} \times \frac{M-c}{N-i+1} && \text{(zunächst } i-1 \text{ Stücke mit insgesamt } c \text{ defekten,} \\ & && \text{dann noch ein defektes Stück auswählen)} \\ &= \frac{M}{N} \times \frac{\binom{M-1}{c} \binom{N-M}{i-1-c}}{\binom{N-1}{i-1}} && \text{(zunächst ein defektes Stück auswählen,} \\ & && \text{dann } i-1 \text{ Stücke mit insgesamt } c \text{ defekten Stücken} \\ & && \text{auswählen).} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\{\hat{n} = i\} = \begin{cases} A_i & \text{für } i = c+1, \dots, n-1 \\ A_n \cup \{X_n \leq c\} & \text{für } i = n, \end{cases}$$

und somit erhalten wir

$$E(\hat{n}) = \sum_{i=c+1}^n i P\{\hat{n} = i\} = \sum_{i=c+1}^n i P(A_i) + n P\{X_n \leq c\},$$

wobei  $X_n \sim H(N, M, n)$ .

1° Es gilt

$$A_{c+1} \cup \dots \cup A_n = \{\text{Los wird abgelehnt}\} = \{X_n > c\},$$

und da die Ereignisse  $A_{c+1}, \dots, A_n$  disjunkt sind, so gilt

$$\sum_{i=c+1}^n P(A_i) = P\{X_n > c\}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=c+1}^n \frac{\binom{N-M}{i-1-c}}{\binom{N-1}{i-1}} = \frac{N}{M \binom{M-1}{c}} P\{H(N, M, n) > c\}.$$

Diese Formel gilt für beliebige (zulässige) Werte von  $N, M, n, c$ . Wir vergrößern nun jede der vier Variablen um 1 und erhalten

$$\sum_{i=c+2}^{n+1} \frac{\binom{N-M}{i-2-c}}{\binom{N}{i-1}} = \frac{N+1}{(M+1) \binom{M}{c+1}} P\{H(N+1, M+1, n+1) > c+1\}.$$

Nun führen wir in der Summe noch den neuen Summationsindex  $j = i-1$  ein und finden

$$\sum_{j=c+1}^n \frac{\binom{N-M}{j-1-c}}{\binom{N}{j}} = \frac{N+1}{(M+1) \binom{M}{c+1}} P\{H(N+1, M+1, n+1) > c+1\}.$$

Diese Formel wird sich als nützlich erweisen.

2° Es gilt

$$iP(A_i) = i \frac{M}{N} \times \frac{\binom{M-1}{c} \binom{N-M}{i-1-c}}{\binom{N-1}{i-1}} = M \frac{\binom{M-1}{c} \binom{N-M}{i-1-c}}{\binom{N}{i}},$$

und somit erhalten wir mit Hilfe der Formel unter 1°

$$\begin{aligned} \sum_{i=c+1}^n iP(A_i) &= M \binom{M-1}{c} \sum_{i=c+1}^n \frac{\binom{N-M}{i-1-c}}{\binom{N}{i}} \\ &= M \binom{M-1}{c} \times \frac{N+1}{(M+1) \binom{M}{c+1}} P\{H(N+1, M+1, n+1) > c+1\} \\ &= \frac{(c+1)(N+1)}{(M+1)} P\{H(N+1, M+1, n+1) > c+1\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$E(\hat{n}) = \sum_{i=c+1}^n iP(A_i) + nP\{X_n \leq c\} = \frac{(c+1)(N+1)}{(M+1)} P\{X_+ > c+1\} + nP\{X \leq c\},$$

wobei  $X \sim H(N, M, n)$  und  $X_+ \sim H(N+1, M+1, n+1)$ . Damit ist die Formel für den hypergeometrischen Fall bewiesen.

3° Beim Grenzübergang  $N, M \rightarrow \infty, M/N \rightarrow p$  mit  $0 < p < 1$  konvergiert die hypergeometrische Verteilung  $H(N, M, n)$  gegen die Binomialverteilung  $Bi(n, p)$ , und somit folgt aus der obigen Formel die entsprechende Formel für die Binomialverteilung:

$$E(\hat{n}) = \sum_{i=c+1}^n iP(A_i) + nP\{X_n \leq c\} = \frac{(c+1)}{p} P\{X_+ > c+1\} + nP\{X \leq c\},$$

wobei  $X \sim Bi(n, p)$  und  $X_+ \sim Bi(n+1, p)$ .

*Bemerkung:*

Bei einem *randomisierten* Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit abgebrochener Kontrolle bleibt die Zufallsgröße  $\hat{n}$  unverändert, da ja eine randomisierte Entscheidung nur im Schritt  $n$  erfolgen kann. Damit gelten die obigen Formeln auch für *randomisierte* Prüfpläne.

Maple-Arbeitsblatt ein\_pp2.mws

```

> #
  # Einfacher Prüfplan mit abgebrochener Kontrolle
  # Schöne Formel für den Erwartungswert  $E(n_{\text{dach}})$ 
  #
> #  $A_i = \{\text{Prüfung bricht ab genau im Schritt } i\}$ 
  # Gilt die Beziehung:
  #  $P(A_i) = P\{H(N, M, i-1) = c\} * (M-c) / (N-i+1)$ 
  #  $= (M/N) * P\{H(N-1, M-1, i-1) = c\}?$ 
> restart;
> A:=(M-c)/(N-i+1)*binomial(M,c)*binomial(N-M,i-1-c)/binomial(N,i-1);
> B:=(M/N)*binomial(M-1,c)*binomial(N-M,i-1-c)/binomial(N-1,i-1);
> A-B;
> expand(%);
> simplify(%);
> #
  # Gilt die schöne Formel für den Erwartungswert?
> restart;
> N:=5000;
> M:=50;
> n:=303;
> c:=5;
> #
  # Definition der Funktion:  $p(i) = P(A_i)$ 
> p := i -> (M/N)*binomial(M-1,c)*binomial(N-M,i-1-c)/binomial(N-1,i-1);
> S1:=sum(i*p(i),i=c+1..n);
> #  $P(X_{\text{plus}} > c+1)$ 
> prob := sum(binomial(M+1,k)*
              binomial(N-M,n+1-k)/binomial(N+1,n+1),k=c+2..n);
> S2:=prob*(c+1)*(N+1)/(M+1);
> S1-S2;

```

## 4. Zweistufige Prüfpläne

### 1. Struktur eines zweistufigen Prüfplans

Los mit  $N$  Stücken;

$M$  = unbekannte Anzahl der schlechten (defekten) Stücke;

$p = M/N$  = unbekannter Ausschussanteil im Los;

$n_1$  = Umfang der 1. Stichprobe (mit oder ohne Zurücklegen);

$X_1$  = Anzahl der defekten Stücke in der 1. Stichprobe;

Los annehmen, falls  $X_1 \leq c_1$ ;

Los ablehnen, falls  $X_1 \geq d_1$ ;

2. Stichprobe ziehen, falls  $c_1 < X_1 < d_1$ ;

$n_2$  = Umfang der 2. Stichprobe;

$X_2$  = Anzahl der defekten Stücke in der 2. Stichprobe;

$X = X_1 + X_2$  = Anzahl der defekten Stücke in der Gesamtstichprobe vom Umfang  $n = n_1 + n_2$ ;

Los annehmen, falls  $X \leq c$ ;

Los ablehnen, falls  $X > c$ .

Ein solcher Prüfplan heißt *zweistufiger* oder *zweifacher Prüfplan*; der Plan ist festgelegt durch die fünf Zahlen  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c)$ . Die grafische Darstellung eines solchen Plans kann mit Hilfe eines sogenannten *Schirm-* oder *Siebdiagramms* erfolgen (vgl. Abb. 3).

*Sinnvolle Voraussetzungen an einen zweistufigen Prüfplan  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c)$ :*

- 1)  $0 \leq c_1 < d_1 \leq n_1$  und  $0 \leq c \leq n$  (offensichtlich);
- 2)  $c_1 < d_1 - 1$ , denn falls  $c_1 \geq d_1 - 1$ , so hat das Fenster zur 1. Stichprobe keinen Durchlass, und die 2. Stichprobe kann somit nie gezogen werden.
- 3)  $d_1 - 1 \leq c < n$ ; falls  $c = n$ , so führt die 2. Stichprobe stets zur Annahme und ist somit überflüssig; falls  $c < d_1 - 1$ , so kann der Pfad, der durch den Fensterpunkt  $(n_1, d_1 - 1)$  verläuft, nie zur Annahme führen.
- 4)  $c_1/n_1 < c/n$  und  $d_1/n_1 > (c+1)/n$ ; die Ausschussanteile, welche bei der 1. Stichprobe zur Entscheidung führen, sollten extremer sein als bei der Gesamtstichprobe.

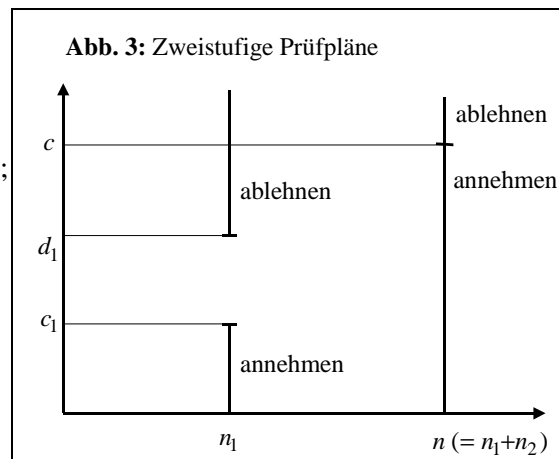
*Beispiel:*

$$n_1 = 50, \quad n_2 = 100,$$

$$c_1 = 1, \quad c = 7,$$

$$d_1 = 5.$$

In diesem Beispiel sind die obigen Voraussetzungen alle erfüllt.



## 2. Berechnung der OC-Funktion

Es sei

$$E_1^a = \{\text{Annahme nach 1. Stichprobe}\};$$

$$E_1^r = \{\text{Ablehnung nach 1. Stichprobe}\};$$

$$E_2^a = \{\text{Annahme nach 2. Stichprobe}\};$$

$$E_2^r = \{\text{Ablehnung nach 2. Stichprobe}\}.$$

Die vier Ereignisse sind disjunkt, und sie bilden eine Zerlegung von  $\Omega$ ; die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten ist daher 1. Die OC-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(p) &= \text{totale Annahmewahrscheinlichkeit als Funktion von } p \\ &= P_p(E_1^a \cup E_2^a) = P_p(E_1^a) + P_p(E_2^a), \end{aligned}$$

und es ist

$$P_p(E_1^a) = P_p\{X_1 \leq c_1\};$$

$$\begin{aligned} P_p(E_2^a) &= P_p\{c_1 < X_1 < d_1, X \leq c\} = \sum_{j=c_1+1}^{d_1-1} P_p\{X_1 = j, X_2 \leq c - j\} \\ &= \sum_{j=c_1+1}^{d_1-1} P_p\{X_1 = j\} P_p\{X_2 \leq c - j | X_1 = j\} \\ &= \sum_{j=c_1+1}^{d_1-1} P_p\{X_1 = j\} P_p\{X_{2|j} \leq c - j\}. \end{aligned}$$

Dabei benützen wir die Bezeichnungsweise  $X_{2|j} = X_2 | X_1 = j$ . Nun gilt

a) im Fall ohne Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):

$$X_1 \sim H(N, M, n), p = M/N;$$

$$X_{2|j} \sim H(N - n_1, M - j, n_2);$$

b) im Fall mit Zurücklegen (Binomialverteilung):

$$X_1 \sim Bi(n_1, p);$$

$$X_{2|j} = X_2 \sim Bi(n_2, p).$$

Ohne formalen Beweis erwähnen wir die plausible Tatsache, dass die OC-Funktion  $L(p)$  monoton abnehmend ist (wie bei einfachen Prüfplänen).

## 3. Durchschnittlicher Prüfumfang

Wir betrachten einen zweistufigen Prüfplan  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c)$  und bezeichnen mit  $\hat{n}$  den Prüfumfang bei diesem Prüfplan:

$$\hat{n} = \begin{cases} n_1 & \text{falls } X_1 \leq c_1 \text{ oder } X_1 \geq d_1 \\ n_1 + n_2 & \text{falls } c_1 < X_1 < d_1 \end{cases}$$

Es sei

$$A = \{\text{Abbruch nach 1. Stichprobe}\} = \{X_1 \leq c_1 \text{ oder } X_1 \geq d_1\};$$

$$B = \{\text{Fortsetzung nach 1. Stichprobe}\} = \{c_1 < X_1 < d_1\}.$$

Es gilt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$ , und daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E_p(\hat{n}) &= n_1 P_p(A) + (n_1 + n_2) P_p(B) = n_1 \underbrace{[P_p(A) + P_p(B)]}_{=1} + n_2 P_p(B) \\
 &= n_1 + n_2 \underbrace{P_p\{c_1 < X_1 < d_1\}}_{\text{Fortsetzungswkeit}}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$X_1 \sim H(N, M, n)$  im Falle ohne Zurücklegen;

$X_1 \sim Bi(n, p)$  im Falle mit Zurücklegen.

Der Erwartungswert von  $\hat{n}$  wird auch als *durchschnittlicher Prüfumfang* bezeichnet oder als ASN (average sample number):

$$ASN(p) = E_p(\hat{n}) = n_1 + n_2 P_p\{c_1 < X_1 < d_1\}.$$

#### 4. Randomisierte Prüfpläne

In diesem Abschnitt wollen wir zweistufige Prüfpläne untersuchen, bei denen randomisierte Entscheidungen zugelassen sind. Das Prüfverfahren ist dann wie folgt festgelegt:

Los mit  $N$  Stücken;

$M$  = unbekannte Anzahl der defekten Stücke;

$p = M/N$  = unbekannter Ausschussanteil im Los;

$n_1$  = Umfang der 1. Stichprobe (mit oder ohne Zurücklegen);

$X_1$  = Anzahl der defekten Stücke in der 1. Stichprobe;

falls  $X_1 < c_1$ : Los annehmen;

falls  $X_1 = c_1$ :  $\begin{cases} \text{Los annehmen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta_1; \\ \text{weiter prüfen mit Wahrscheinlichkeit } \delta_1; \end{cases}$

falls  $c_1 < X_1 < d_1$ : weiter prüfen (d.h. 2. Stichprobe ziehen);

falls  $X_1 = d_1$ :  $\begin{cases} \text{weiter prüfen mit Wahrscheinlichkeit } \delta_2; \\ \text{Los ablehnen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta_2; \end{cases}$

falls  $X_1 > d_1$ : Los ablehnen;

$n_2$  = Umfang der 2. Stichprobe;

$X_2$  = Anzahl der defekten Stücke in der 2. Stichprobe;

$X = X_1 + X_2$  = Anzahl der defekten Stücke in der Gesamtstichprobe vom Umfang  $n = n_1 + n_2$ ;

falls  $X < c$ : Los annehmen;

falls  $X = c$ :  $\begin{cases} \text{Los annehmen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta_3; \\ \text{Los ablehnen mit Wahrscheinlichkeit } \delta_3; \end{cases}$

falls  $X > c$ : Los ablehnen.

Ein solcher Prüfplan heißt *zweistufiger randomisierter Prüfplan*; der Plan ist festgelegt durch die acht Zahlen  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ . Wir haben also drei zusätzliche reelle Variablen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ , welche die Suche nach optimalen Plänen vereinfachen (wie dies ja auch bei einfachen Plänen der Fall war). Im Spezialfall  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$  erhalten wir den gewöhnlichen (nicht-randomisierten) zweistufigen Prüfplan  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c)$ .

Der *gewöhnliche* zweistufige Prüfplan ist nur sinnvoll, wenn  $c_1 < d_1 - 1$ , weil sonst das Fenster zur ersten Stichprobe keinen Durchlass hat und die zweite Stichprobe somit nie gezogen werden kann (siehe oben). Der *randomisierte* zweistufige Prüfplan ist auch sinnvoll für  $c_1 = d_1 - 1$  und selbst für  $c_1 = d_1$ . Im Fall  $c_1 = d_1$  muss allerdings unsere obige Beschreibung modifiziert werden:

$$\begin{aligned} \text{falls } X_1 < c_1 (= d_1): & \quad \text{Los annehmen;} \\ \text{falls } X_1 = c_1 (= d_1): & \quad \begin{cases} \text{Los annehmen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta_1; \\ \text{Los ablehnen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta_2; \\ \text{weiter prüfen mit Wahrscheinlichkeit } \delta_1 + \delta_2 - 1; \end{cases} \\ \text{falls } X_1 > c_1 (= d_1): & \quad \text{Los ablehnen.} \end{aligned}$$

Der Prüfplan ist nur zulässig, falls  $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$  und falls  $\delta_1 + \delta_2 > 1$ ; falls  $\delta_1 + \delta_2 = 1$ , so wird die zweite Stichprobe nie gezogen, und der zweistufige Plan entartet zu einem einstufigen randomisierten Prüfplan.

Die OC-Funktion zu einem zweistufigen randomisierten Prüfplan ist definiert als

$$L(p) = \text{Annahmewahrscheinlichkeit als Funktion von } p.$$

Falls  $c_1 < d_1$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} L(p) = & P_p\{X_1 \leq c_1\} - \delta_1 P_p\{X_1 = c_1\} \\ & + \sum_{j=c_1+1}^{d_1-1} P_p\{X_1 = j\} \left[ P_p\{X_{2|j} \leq c - j\} - \delta_3 P_p\{X_{2|j} = c - j\} \right] \\ & + \delta_1 P_p\{X_1 = c_1\} \left[ P_p\{X_{2|c_1} \leq c - c_1\} - \delta_3 P_p\{X_{2|c_1} = c - c_1\} \right] \\ & + \delta_2 P_p\{X_1 = d_1\} \left[ P_p\{X_{2|d_1} \leq c - d_1\} - \delta_3 P_p\{X_{2|d_1} = c - d_1\} \right]; \end{aligned}$$

falls  $c_1 = d_1$ , so ist

$$\begin{aligned} L(p) = & P_p\{X_1 \leq c_1\} - \delta_1 P_p\{X_1 = c_1\} \\ & + (\delta_1 + \delta_2 - 1) P_p\{X_1 = c_1\} \left[ P_p\{X_{2|c_1} \leq c - c_1\} - \delta_3 P_p\{X_{2|c_1} = c - c_1\} \right]. \end{aligned}$$

Der zu erwartende Prüfumfang ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ASN}(p) &= E_p(\hat{n}) \\ &= n_1 + n_2 \times \text{Forsetzungswahrscheinlichkeit} \\ &= \begin{cases} n_1 + n_2 [P_p\{c_1 < X_1 < d_1\} + \delta_1 P_p\{X_1 = c_1\} + \delta_2 P_p\{X_1 = d_1\}] & \text{falls } c_1 < d_1 \\ n_1 + n_2 (\delta_1 + \delta_2 - 1) P_p\{X_1 = c_1\} & \text{falls } c_1 = d_1. \end{cases} \end{aligned}$$

## 5. Typisches Optimierungsproblem

Gegeben:

$$N, n_1, n_2, (p_\alpha, \alpha), (p_\beta, \beta).$$

Gesucht:

Ein zweistufiger randomisierter Prüfplan mit den vorgegebenen Stichprobenumfängen  $n_1, n_2$  (ohne Zurücklegen) und mit Konstanten  $(c_1, d_1, c, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$  so, dass

- 1)  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$ ,
- 2)  $\max_{0 \leq p \leq 1} ASN(p) = \min$ .

Beispiel:

$$\begin{aligned} N &= 5000 && \text{Losumfang,} \\ n_1 &= 180 && \text{Umfang der 1. Stichprobe,} \\ n_2 &= 180 && \text{Umfang der 2. Stichprobe,} \\ p_\alpha &= 0.01, && \alpha = 0.9, \\ p_\beta &= 0.03, && \beta = 0.1. \end{aligned}$$

Lösungsidee (Maple-Arbeitsblatt `zwei_pp.mws`):

Bei einem gewöhnlichen Prüfplan  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c)$  können die drei Konstanten  $c_1, d_1, c$  nur *ganzzahlige* Werte annehmen, und wir hätten dann ein ganzzahliges Optimierungsproblem zu lösen. Bei einem randomisierten Prüfplan  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$  können die drei Paare  $(c_1, \delta_1)$ ,  $(d_1, \delta_2)$  und  $(c, \delta_3)$  aufgefasst werden als je eine *reelle* Variable. Wir haben somit drei freie reelle Variablen, und es sind zwei Gleichungen vorgegeben:  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$ . Somit ist eine der drei reellen Variablen frei zur Bestimmung des minimalen Stichprobenumfangs.

Wir beginnen nun mit dem Prüfplan  $c_1 = 0, \delta_1 = 1$ ; bei einem solchen Plan kann die erste Stichprobe nie zur Annahme führen, das Fenster zur ersten Stichprobe befindet sich also in der unteren Extremlage. Nun wählen wir die übrigen vier Parameter  $(d_1, c, \delta_2, \delta_3)$  so, dass die beiden Gleichungen erfüllt sind. Bei gegebenem  $c_1, d_1, c$  sind die beiden Gleichungen  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$  von der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + a_{13}\delta_3 + a_{14}\delta_1\delta_3 + a_{15}\delta_2\delta_3 &= \alpha; \\ a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + a_{23}\delta_3 + a_{24}\delta_1\delta_3 + a_{25}\delta_2\delta_3 &= \beta. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_{ij}$  hängen ab von den Parametern  $c_1, d_1, c$ . Dieses (nichtlineare) Gleichungssystem kann bei gegebenem  $\delta_1$  mit Hilfe von Maple gelöst werden nach  $\delta_2$  und  $\delta_3$ . Falls die Lösungen zulässig sind, d.h. falls  $0 \leq \delta_2, \delta_3 \leq 1$  ist, so haben wir einen Prüfplan  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$  gefunden mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$ ; falls die Lösungen unzulässig sind, so sind die zugehörigen ganzzahligen Parameter  $d_1$  bzw.  $c$  entsprechend zu ändern. Der korrekte Prüfplan für  $c_1 = 0, \delta_1 = 1$  ist gegeben in der Zeile 1 von Tabelle 6.

Im nächsten Schritt verkleinern wir den Wert von  $\delta_1$  bis eine der drei Variablen  $\delta_1, \delta_2$  oder  $\delta_3$  den zulässigen Bereich verlässt; dies ist der Fall für  $\delta_1 = 0$ . Der zugehörige Prüfplan ist gegeben in Zeile 2 von Tabelle 6. Der Prüfplan mit  $c_1 = 0, \delta_1 = 0$  ist äquivalent zum Prüfplan  $c_1 = 1, \delta_1 = 1$  (bei gleichbleibenden übrigen Parametern).

Im dritten Schritt verkleinern wir den neuen Wert  $\delta_1 = 1$  wiederum, bis eine der drei Variablen  $\delta_1, \delta_2$  oder  $\delta_3$  den zulässigen Bereich verlässt; dies ist bei  $\delta_3$  der Fall, da für  $\delta_1 < 0.63$  (etwa) die Variable  $\delta_3 > 1$  wird. Wir lösen nun unser Gleichungssystem bei gegebenem  $\delta_3 = 1$  nach  $\delta_1$  und  $\delta_2$  und fin-

den als Lösung den Plan 3 in Tabelle 6. Der Prüfplan mit  $c = 8, \delta_3 = 1$  äquivalent zum Prüfplan mit  $c = 7, \delta_3 = 0$  (bei gleichbleibenden übrigen Parametern).

Auf diese Weise fahren wir fort und verschieben unser Fenster bei der 1. Stichprobe etappenweise von unten (Plan 1:  $c_1 = 0, \delta_1 = 1$ ) nach oben (Plan 10:  $c_1 = 2, \delta_1 = 0.14158$ ). Beim Prüfplan 10 endet das Verfahren, da hier  $d_1 = 7, \delta_2 = 0$  und  $c = 6$  ist, und da nun der Fensterpunkt  $(n_1, d_1)$  stets zur Ablehnung führt; wenn  $\delta_2$  oder  $d_1$  weiter vergrößert werden, so bleiben alle übrigen Parameter unverändert, und somit kann sich auch die OC-Funktion nicht mehr ändern.

Für die gefundenen Prüfpläne bestimmen wir nun jeweils das Maximum der ASN-Funktion

$$ASN_{\max} = \max_{0 \leq p \leq 1} ASN(p) = ASN(p^*) \text{ mit } p^* = M^*/N.$$

Die Werte  $ASN_{\max}$  und die zugehörigen Werte der Maximalstelle  $M^*$  bzw.  $p^*$  finden wir in Spalte 8 bis 10 von Tabelle 6. Es zeigt sich, dass die Maximalwerte  $ASN_{\max}$  in Tabelle 6 ein *eintaliges* Verhalten (*eintalig* = Gegenteil von *eingipflig*, *unimodal*) aufweisen; das Maximum beträgt bei Plan 1 360 (bei diesem Plan kann das Los nur bei der zweiten Stichprobe angenommen werden), es nimmt dann monoton ab, erreicht bei Plan 6 das Minimum von 250.840, und nimmt dann wieder monoton zu bis zum Wert 304.341 bei Plan 10. Die Pläne 5 und 7 in der Nähe von Plan 6 zeigen, dass bei Plan 6 der Maximalwert  $ASN_{\max}$  tatsächlich sein Minimum erreicht.

**Tabelle 6:** Versuchspläne mit  $n_1 = n_2 = 180$  und mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Nr.	$c_1$	$d_1$	$c$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$M^*$	$p^*$	$ASN_{\max}$
1	0	4	8	1	0.17486	0.90866	0	0	360
2	0	4	8	0	0.17585	0.92818	52	0.0104	315.108
	1								
3	1	4	8	0.62626	0.17975	1	58	0.0116	296.745
			7			0			
4	1	4	7	0	0.22868	0.17719	71	0.0142	272.175
	2			1					
5	2	4	7	0.39056	0.43537	0.999	82	0.0164	250.861
6	2	4	7	0.38988	0.43560	1	82	0.0164	250.840
			6			0			
7	2	4	6	0.38961	0.43634	0.001	82	0.0164	250.851
8	2	4	6	0.18317	1	0.65762	92	0.0184	261.159
		5							
9	2	5	6	0.14158	1	0.79812	106	0.0212	284.934
		6			0				
10	2	6	6	0.14158	1	0.80250	118	0.0236	304.341
		7			0				

Aufgrund der Ergebnisse in Tabelle 6 finden wir also für  $N = 5000$  und  $n_1 = n_2 = 180$  den folgenden optimalen zweistufigen randomisierten Prüfplan (Prüfplan Nr. 6 in Tabelle 6):

$$\begin{aligned}c_1 &= 2, & \delta_1 &= 0.38988, \\d_1 &= 4, & \delta_2 &= 0.43560, \\c &= 6, & \delta_3 &= 0.\end{aligned}$$

Für diesen Prüfplan gilt:

$$\begin{aligned}L(p_\alpha) &= \alpha, & L(p_\beta) &= \beta, \\ASN(p_\alpha) &= 234.374, & ASN(p_\beta) &= 218.003; \\ASN_{\max} &= \max_p ASN(p) = 250.840;\end{aligned}$$

die Maximalstelle der ASN-Funktion ist  $p^* = 0.0164$  ( $M^* = Np^* = 82$ );

$ASN_{\max}$  ist minimal unter allen Prüfplänen mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$ .

Der optimale *einstufige* Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$  ist gegeben durch  $n = 292, c = 5, \delta = 0.3220$  (vgl. Tabelle 3 im Kapitel 3). Das *zweistufige* Prüfverfahren benötigt im ungünstigsten Fall einen durchschnittlichen Prüfumfang von 250.840; der durchschnittliche Prüfumfang ist also stets geringer als der Prüfumfang beim einstufigen Verfahren.

*Zur Wahl der Stichprobenumfänge  $n_1$  und  $n_2$ :*

- Da  $n = 292$  der minimale Stichprobenumfang bei einem *einstufigen* Prüfplan mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$  ist, so muss bei einem *zweistufigen* Prüfplan mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$  die Summe  $n_1 + n_2 \geq 292$  sein, und es muss  $n_1 < 292$  sein.
- Eine sinnvolle Optimierungsaufgabe besteht darin, einen zweistufigen Prüfplan zu suchen mit  $n_1 = n_2$ , für den das Maximum der ASN-Funktion minimal wird. Die Tabelle 7 zeigt die optimalen Pläne für verschiedene Stichprobenumfänge  $n_1 (= n_2)$ ; der optimale Plan für  $n_1 = n_2 = 180$  ist unser Plan 6 in Tabelle 6. Da die Funktion  $ASN_{\max}$  wiederum ein eintaliges Verhalten aufweist als Funktion des Stichprobenumfangs  $n_1 (= n_2)$  mit einem Minimum  $ASN_{\max} = 250.840$  für  $n_1 = n_2 = 180$ , so ist der zugehörige Prüfplan die Lösung zu unserer Optimierungsaufgabe (zumindest für Stichprobenumfänge, welche ein Vielfaches von 10 betragen).
- Eine verfeinerte Version der Optimierungsaufgabe unter b) besteht darin, einen zweistufigen Prüfplan zu suchen mit Stichprobenumfängen  $n_1, n_2$ , für den das Maximum der ASN-Funktion minimal wird. Die Tabelle 8 zeigt die optimalen Pläne für verschiedene Paare  $(n_1, n_2)$ ; den globalen optimalen Plan finden wir für  $n_1 = 150$  und  $n_2 = 210$  (zumindest für Stichprobenumfänge, welche ein Vielfaches von 10 betragen); dann ist  $ASN_{\max} = 247.265$ . Der Gewinn im Vergleich zur symmetrischen Lösung unter b) mit  $ASN_{\max} = 250.840$  ist in unserem Beispiel nicht sehr groß.

**Tabelle 7:** Zweistufige Prüfpläne mit  $n_1 = n_2$  und mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$ 

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$n_1 = n_2$	$c_1$	$d_1$	$c$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$M^*$	$p^*$	$ASN_{\max}$
146	0	5	5	0.67790	0	0.30671	58	0.0116	279.819
170	2	4	6	0.93670	0.15987	0	74	0.0148	252.596
180	2	4	6	0.38988	0.43560	0	82	0.0164	250.840
190	3	4	7	0.95802	0.60323	0.8	88	0.0176	252.743
200	3	4	7	0.81575	0.56815	0	84	0.0168	258.335
250	4	5	9	0.41320	0.07320	0	82	0.0164	273.862
291	5	5	10	0.33496	0.66607	0	85	0.0170	291.055

**Tabelle 8:** Zweistufige Prüfpläne mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$ 

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
$n_1$	$n_2$	$c_1$	$d_1$	$c$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$M^*$	$p^*$	$ASN_{\max}$
100	192	0	5	5	0.95998	0	0.32244	51	0.0102	288.642
100	200	0	4	5	0.67848	0	0.19977	63	0.0126	274.831
100	240	0	3	6	0.01	0.80239	0.61835	86	0.0172	269.303
100	250	0	3	6	0.12	0.40789	0.17196	74	0.0148	267.898
100	260	1	3	6	0.98866	0.30009	0	76	0.0152	<b>263.317</b>
100	270	1	3	6	0.92719	0.39933	0	80	0.0160	267.727
100	300	1	3	7	0.96421	0.01572	0	71	0.0142	275.419
100	500	1	2	10	0.70652	0.96176	0	75	0.0150	342.490
140	210	1	4	6	0.30541	0	0.36356	80	0.0160	255.280
140	220	1	3	6	0.27995	0.88580	0.05	79	0.0158	254.338
140	230	1	3	6	0.13989	0.89792	0	82	0.0164	<b>252.529</b>
140	240	1	3	6	0.01447	0.93858	0	86	0.0172	252.835
140	250	1	3	7	0	0.93901	0.82979	86	0.0172	256.783
150	200	1	4	6	0.05110	0	0.21701	80	0.0160	248.278
150	210	2	3	6	0.98008	0.94416	0	81	0.0162	<b>247.265</b>
150	220	2	3	6	0.90854	0.97651	0	82	0.0164	249.285
160	180	1	4	6	0	0.11747	0.19710	78	0.0156	249.337
160	190	2	4	6	0.92430	0	0.00774	77	0.0154	<b>247.544</b>
160	200	2	4	6	0.82224	0.06980	0	79	0.0158	248.705
160	210	2	4	6	0.73940	0.15870	0	81	0.0162	251.306
180	170	2	4	6	0.55672	0.38822	0	78	0.0156	252.252
180	180	2	4	6	0.38988	0.43560	0	82	0.0164	<b>250.840</b>
180	190	2	4	6	0.26294	0.48849	0	85	0.0170	251.061

Maple-Arbeitsblatt zwei\_pp.mws

```

> #
  # Randomisierter zweistufiger Prüfplan:
  # Bestimmung der Randomisierungsgewichte delta1,delta2,delta3 so,
  # dass  $L(p\_alpha)=alpha$  und  $L(p\_beta)=beta$ 
  #
> restart;
> #  $hyp(k) = Pr\{X1 = k\} = P\{H(N,M,n1) = k\}$ 
> hyp := k -> 1.0*binomial(M,k)*binomial(N-M,n1-k)/binomial(N,n1);
> #  $hyp2(j,k) = Pr\{X2|j = k\} = P\{H(N-n1,M-j,n2) = k\}$ 
> hyp2 := (j,k) -> 1.0*binomial(M-j,k)*binomial(N-n1-M+j,n2-k)
  /binomial(N-n1,n2);
> N:=5000;
> n1:=100;
> n2:=200;
> c1:=0;
> d1:=3;
> c:=6;
> # Berechnung von  $L(p\_alpha)$ 
> M:=50; #  $p\_alpha = 0.01$ 
> # Annahmewahrscheinlichkeit bei 1. Stichprobe
  L_alpha := sum(hyp(i),i=0..c1)-delta1*hyp(c1);
> # Annahmewahrscheinlichkeit bei 2. Stichprobe
  #  $sum(P\{X1 = j\}*(P\{X2|j \leq c-j\}-delta3*P\{X2|j = c-j\}, j=c1+1..d1-1)$ 
> A:=0;
> B:=0;
> for j from c1+1 to d1-1 do
  A:=A+hyp(j)*sum(hyp2(j,i),i=0..c-j);
  B:=B+hyp(j)*hyp2(j,c-j);
end do;
> L_alpha:=L_alpha+A-delta3*B;
> # Randpunkte c1,d1
> if (c1<d1) then
  # Randpunkt c1
  L_alpha := L_alpha + delta1*hyp(c1)
    *(sum(hyp2(c1,i),i=0..c-c1)-delta3*hyp2(c1,c-c1));
  # Randpunkt d1
  L_alpha := L_alpha + delta2*hyp(d1)
    *(sum(hyp2(d1,i),i=0..c-d1)-delta3*hyp2(d1,c-d1));
elif (c1=d1) then
  L_alpha := L_alpha + (delta1+delta2-1)*hyp(c1)
    *(sum(hyp2(c1,i),i=0..c-c1)- delta3*hyp2(c1,c-c1));
end if;
> L_alpha := simplify(%);
> #
> # Berechnung von  $L(p\_beta)$ 
> M := 150; #  $p\_beta = 0.03$ 
> L_beta := sum(hyp(i),i=0..c1)-delta1*hyp(c1);
> A:=0;
> B:=0;
> for j from c1+1 to d1-1 do
  A:=A+hyp(j)*sum(hyp2(j,i),i=0..c-j);
  B:=B+hyp(j)*hyp2(j,c-j);
end do;
> L_beta:=L_beta+A-delta3*B;
> if (c1<d1) then
  L_beta := L_beta + delta1*hyp(c1)
    *(sum(hyp2(c1,i),i=0..c-c1)-delta3*hyp2(c1,c-c1));
  L_beta := L_beta + delta2*hyp(d1)
    *(sum(hyp2(d1,i),i=0..c-d1)-delta3*hyp2(d1,c-d1));
elif (c1=d1) then
  L_beta := L_beta + (delta1+delta2-1)
    *hyp(c1)*(sum(hyp2(c1,i),i=0..c-c1)-delta3*hyp2(c1,c-c1));
end if;
> L_beta := simplify(%);

```

```
> delta1:=1;
> unassign('delta2','delta3');
> fsolve({L_alpha-0.9,L_beta-0.1},{delta2,delta3});
> assign(%);
> #
  # Maximum der ASN-Funktion
  #
> unassign('M','j');
> # hyper(M,k) = Pr{X1 = k} = P{H(N,M,n1) = k}
> hyper := (M,k) ->1.0*binomial(M,k)*binomial(N-M,n1-k)/binomial(N,n1);
> # ASN-Funktion als Funktion von M
  if (c1<d1) then
    ASN := M -> n1 + n2*(sum(hyper(M,j),j=c1+1..d1-1)+delta1
                          *hyper(M,c1)+delta2*hyper(M,d1));
  elif (c1=d1) then
    ASN := M -> n1 + n2*(delta1+delta2-1)*hyper(M,c1);
  end if;
> print ('M','p','ASN(p)');
  for M from 0 by 10 to 100 do
    print(M,evalf(M/N),ASN(M))
  end do;
>
```

## 5. Sequentielle Verfahren

### 1. Einführung

Wir betrachten wiederum das Grundproblem der Attributenkontrolle:

Los mit  $N$  Stücken;

$M$  = unbekannte Anzahl der defekten Stücke;

$p = M/N$  = unbekannter Anteil der defekten Stücke.

*Gesucht:* Prüfverfahren mit OC-Funktion  $L(p)$  so, daß

$$L(p_\alpha) \geq \alpha \text{ und } L(p_\beta) \leq \beta$$

bei vorgegebenem  $p_\alpha, p_\beta, \alpha, \beta$ .

*Bisher:*

- einstufige (einfache) Prüfpläne  $(n, c)$ ;
- zweistufige Prüfpläne  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c)$ ;
- analog: dreistufige Prüfpläne  $(n_1, c_1, d_1, n_2, c_2, d_2, n_3, c)$ ;
- analog: mehrstufige Prüfpläne mit vier und mehr Stufen.

*Jetzt: Sequentielle Prüfverfahren* (Grenzfall der mehrstufigen Prüfpläne):

die Stücke werden nacheinander geprüft;  
nach jedem geprüften Stück wird entschieden,  
ob das Los angenommen oder abgelehnt werden kann,  
oder ob weiter geprüft werden soll.

Fall *ohne* Zurücklegen (hypergeometrische Verteilung):

das sequentielle Prüfverfahren endet spätestens nach  $N$  Schritten.

Fall *mit* Zurücklegen (Binomialverteilung):

das sequentielle Prüfverfahren besitzt einen *unbeschränkten* Prüfumfang.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur den Fall *mit* Zurücklegen, da dieser Fall einfacher zu behandeln ist, und wir behandeln die sequentiellen Verfahren in der Sprache der Testtheorie.

Wir betrachten zunächst das Testproblem mit einfacher Hypothese und einfacher Alternative:

$H_0: p = p_0 (= p_\alpha)$ , d.h. der unbekannte Ausschussanteil beträgt  $p_0$

$H_1: p = p_1 (= p_\beta)$ , d.h. der unbekannte Ausschussanteil beträgt  $p_1$

mit  $p_0 < p_1$ . Wir nehmen an, dass die zu prüfenden Stücke nacheinander zufällig aus dem Los ausgewählt werden *mit Zurücklegen* und definieren die Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots$  wie folgt:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i\text{-tes Stück defekt,} \\ 0 & \text{falls } i\text{-tes Stück gut.} \end{cases}$$

Die Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots$  sind unabhängig je mit einer Bernoulli-Verteilung  $Bi(1, p)$ . Es sei

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i = \text{Anzahl der defekten Stücke unter den ersten } n \text{ geprüften Stücken,}$$

$k$  = Realisation von  $Y_n$ .

Dann gilt

unter  $H_0$ :  $Y_n \sim Bi(n, p_0)$ ,

unter  $H_1$ :  $Y_n \sim Bi(n, p_1)$ .

Bei fest vorgegebenem Stichprobenumfang  $n$  wäre der optimale Test gegeben durch das Lemma von Neyman-Pearson:

$$q(k) = \frac{P_1\{Y_n = k\}}{P_0\{Y_n = k\}} = \frac{p_1^k (1-p_1)^{n-k}}{p_0^k (1-p_0)^{n-k}} = \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^k = \text{Likelihood-Quotient};$$

verwirf  $H_0$ , falls  $q(k)$  zu groß, d.h. falls  $k$  zu groß.

Ein naheliegendes sequentielles Prüfverfahren hat somit folgende Struktur:

wähle  $H_1$  (d.h. lehne das Los ab), falls  $q(k)$  zu groß, d.h. falls  $q(k) \geq B$  ( $> 1$ );

wähle  $H_0$  (d.h. nimm das Los an), falls  $q(k)$  zu klein, d.h. falls  $q(k) \leq A$  ( $< 1$ );

prüfe weiter, falls  $q(k)$  "dazwischen" liegt, d.h. falls  $A < q(k) < B$ .

*Formales Rezept zum sogenannten sequentiellen Likelihood-Quotienten-Test:*

$X_1, X_2, \dots$  unabhängig je mit Bernoulliverteilung  $Bi(1, p)$ ;

$Y_n = X_1 + \dots + X_n \sim Bi(n, p)$ ;

$H_0: p = p_0$  gegen  $H_1: p = p_1$  mit  $p_0 < p_1$ ;

$k_n =$  Realisation von  $Y_n$ ;

$$q(k_n) = \frac{P_1\{Y_n = k_n\}}{P_0\{Y_n = k_n\}};$$

der sequentielle Test ist festgelegt durch zwei Schranken  $A, B$  mit  $0 < A < 1 < B < \infty$ ;

sobald  $q(k_n) \leq A$ :  $H_0$  annehmen;

sobald  $q(k_n) \geq B$ :  $H_0$  ablehnen;

falls  $A < q(k_n) < B$ : weiter beobachten.

Dieses Testverfahren heißt *sequentieller Likelihood-Quotienten-Test* (*sequential likelihood ratio test* oder *sequential probability ratio test* = SPRT). Ein SPRT ist festgelegt durch die vier Zahlen

$p_0, p_1, A, B$  mit  $0 < p_0 < p_1 < 1$  und  $0 < A < 1 < B < \infty$ .

*Fragen:*

- Wie sind die Schranken  $A$  und  $B$  zu wählen? Wie hängen diese Schranken mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art zusammen? (Fehler 1. Art:  $H_0$  ablehnen, obwohl  $H_0$  wahr ist; Fehler 2. Art:  $H_0$  annehmen, obwohl  $H_1$  wahr ist.)
- Wie groß ist der durchschnittlich zu erwartende Stichprobenumfang unter  $H_0$  bzw. unter  $H_1$ ?
- Ist das Verfahren optimal?

## 2. Andere Form des SPRT

Der Likelihood-Quotient kann geschrieben werden als

$$q(k_n) = \left( \frac{1-p_1}{1-p_0} \right)^n \rho^{k_n}, \text{ wobei } \rho = \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}.$$

Da  $0 < p_0 < p_1 < 1$ , so gilt  $1 < \rho < \infty$ . Die Ungleichung  $q(k_n) \leq A$  kann nun geschrieben werden als

$$\begin{aligned} q(k_n) \leq A &\Leftrightarrow \ln q(k_n) \leq \ln A \\ &\Leftrightarrow k_n \ln \rho - n \ln \left( \frac{1-p_0}{1-p_1} \right) \leq \ln A \\ &\Leftrightarrow k_n \leq cn - a, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\ln A}{\ln \rho} > 0, \\ c &= \frac{\ln \left( \frac{1-p_0}{1-p_1} \right)}{\ln \rho} > 0. \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$q(k_n) \geq B \Leftrightarrow k_n \geq cn + b,$$

wobei

$$b = \frac{\ln B}{\ln \rho} > 0.$$

*Zusammenfassung:*

Der SPRT mit den Konstanten  $p_0, p_1, A, B$  ( $0 < p_0 < p_1 < 1; 0 < A < 1 < B < \infty$ ) ist äquivalent zu folgendem Entscheidungsverfahren:

- $H_0$  annehmen, falls  $k_n \leq cn - a$ ;  
 (1)  $H_0$  ablehnen, falls  $k_n \geq cn + b$ ;  
 weiter beobachten, falls  $cn - a \leq k_n \leq cn + b$ ,

wobei

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}, \quad 1 < \rho < \infty; \\ a &= \frac{-\ln A}{\ln \rho}, \quad a > 0; \\ b &= \frac{\ln B}{\ln \rho}, \quad b > 0; \\ c &= \frac{\ln \left( \frac{1-p_0}{1-p_1} \right)}{\ln \rho}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Anstelle der vier Parameter  $p_0, p_1, A, B$  hat unsere Entscheidungsregel jetzt nur noch drei Parameter  $a, b, c$ . Mit Hilfe der Teststatistik  $T_n = k_n - cn$  kann man die Entscheidungsregel (1) auch schreiben als

- $H_0$  annehmen, falls  $T_n \leq -a$ ;  
 (2)  $H_0$  ablehnen, falls  $T_n \geq b$ ;  
 weiter beobachten, falls  $-a \leq T_n \leq b$ .

### 3. Optimalität des SPRT

Wir betrachten in diesem Abschnitt den sequentiellen Likelihood-Quotienten-Test (SPRT) in allgemeinerer Form als bisher, und wir interessieren uns hier für eine interessante Optimalitätseigenschaft dieses Tests.

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige, diskrete Zufallsgrößen je mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p$ ;

$H_0: p = p_0$  gegen  $H_1: p = p_1$  (einfache Hypothese und einfache Alternative);

$$q_n(x) = q_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{P_1(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P_0(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} = \frac{p_1(x_1) \cdots p_1(x_n)}{p_0(x_1) \cdots p_0(x_n)} = \frac{p_{1n}}{p_{0n}} \quad (\text{Likelihood-Quotient}).$$

Bisher waren  $p_0$  und  $p_1$  die Parameter einer Bernoulli-Verteilung  $Bi(1, p)$ ; jetzt bezeichnen  $p_0$  und  $p_1$  beliebige eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen einer diskreten Zufallsgröße.

*Sequentieller Likelihood-Quotienten-Test (SPRT):*

beobachte weiter, solange  $A < q_n(x) < B$ ;

sobald  $q_n(x) \leq A$ :  $H_0$  annehmen;

sobald  $q_n(x) \geq B$ :  $H_0$  ablehnen.

Dieser SPRT ist festgelegt durch die beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $p_0$  und  $p_1$ , sowie die Schranken  $A, B$  mit  $0 < A < 1 < B < \infty$ .

$N$  = Anzahl der Beobachtungen bis zur Finalentscheidung (Annahme oder Ablehnung von  $H_0$ );

$N$  ist eine Zufallsgröße;

$$\alpha_0 = P_0 \{H_0 \text{ wird abgelehnt}\} = \text{Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art}$$

$$\alpha_1 = P_1 \{H_0 \text{ wird angenommen}\} = \text{Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art}$$

Die Güte des SPRT ist charakterisiert durch die vier Größen  $\alpha_0, \alpha_1, E_0(N), E_1(N)$ .

*Satz:*

Unter allen Tests (sequentiell oder mit festem Umfang), für welche

$$(3) \quad \begin{aligned} P_0 \{ \text{Ablehnung von } H_0 \} &\leq \alpha_0 \\ P_1 \{ \text{Annahme von } H_0 \} &\leq \alpha_1 \end{aligned}$$

minimiert der SPRT mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  sowohl  $E_0(N)$  als auch  $E_1(N)$ .

*Bemerkung:*

Der Satz gilt analog auch für stetige Zufallsgrößen.

*Folgerung:*

Da es Tests gibt mit festem Stichprobenumfang  $n$ , welche die Bedingungen (3) erfüllen, so müssen die beiden Erwartungswerte  $E_0(N)$  und  $E_1(N)$  bei einem SPRT aufgrund des Satzes stets endlich sein.

Der klassische *Beweis* des Satzes untersucht ein Bayes'sches Entscheidungsproblem, welches mit unserem Testproblem verwandt ist (vgl. Lehmann, E.L., 1959, Testing Statistical Hypotheses, Wiley, Seite 97-110).

#### 4. Ungleichungen zum SPRT

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige, diskrete Zufallsgrößen je mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p$ ;

$H_0: p = p_0$  gegen  $H_1: p = p_1$ ;

$p_{0n} = p_{0n}(x_1, \dots, x_n) = P_0 \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ ;

$p_{1n} = p_{1n}(x_1, \dots, x_n) = P_1 \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ ;

wir betrachten den SPRT mit den Schranken  $A, B$  ( $0 < A < 1 < B < \infty$ );

$\alpha_0 = P_0 \{\text{Ablehnung von } H_0\} = \text{Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art}$ ;

$\alpha_1 = P_1 \{\text{Annahme von } H_0\} = \text{Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art}$ .

Weiter sei

$R_n =$  Menge aller Realisationen  $(x_1, \dots, x_n)$ , welche genau im Schritt  $n$  zur Ablehnung von  $H_0$  führen

$$= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid A < \frac{p_{1k}}{p_{0k}} < B \text{ für } k = 1, \dots, n-1 \text{ und } \frac{p_{1n}}{p_{0n}} \geq B \right\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= P_0 \{\text{Ablehnung von } H_0\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0 \{\text{Ablehnung von } H_0 \text{ genau im Schritt } n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0 \{X \in R_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in R_n} p_{0n} \\ &\leq \frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in R_n} p_{1n} \quad \left( \text{denn für } x \in R_n: p_{0n} \leq \frac{1}{B} p_{1n} \right) \\ &= \frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} P_1 \{X \in R_n\} = \frac{1}{B} P_1 \{\text{Ablehnung von } H_0\} = \frac{1 - \alpha_1}{B}. \end{aligned}$$

Weiter sei

$S_n =$  Menge aller Realisationen  $(x_1, \dots, x_n)$ , welche genau im Schritt  $n$  zur Annahme von  $H_0$  führen

$$= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid A < \frac{p_{1k}}{p_{0k}} < B \text{ für } k = 1, \dots, n-1 \text{ und } \frac{p_{1n}}{p_{0n}} \leq A \right\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= P_1 \{\text{Annahme von } H_0\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_1 \{\text{Annahme von } H_0 \text{ genau im Schritt } n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_1 \{X \in S_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in S_n} p_{1n} \\ &\geq A \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in S_n} p_{0n} \quad \left( \text{denn für } x \in S_n: p_{1n} \geq A p_{0n} \right) \\ &= A \sum_{n=1}^{\infty} P_0 \{X \in S_n\} = A P_0 \{\text{Annahme von } H_0\} = A(1 - \alpha_0). \end{aligned}$$

Wir haben also die beiden Ungleichungen

$$(4) \quad \alpha_0 \leq \frac{1-\alpha_1}{B} \quad \text{und} \quad \alpha_1 \leq A(1-\alpha_0),$$

und daraus ergibt sich

$$A \geq \frac{\alpha_1}{1-\alpha_0} \quad \text{und} \quad B \leq \frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Falls der SPRT stets auf dem Rand entscheidet, so werden die Ungleichungen zu Gleichungen.

Wir möchten nun die Schranken  $A, B$  beim SPRT so wählen, dass die Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art vorgegebene Werte annehmen.

*Konservative Variante:*

Aufgrund der Ungleichungen (4) gilt

$$(5) \quad \alpha_0 \leq \frac{1-\alpha_1}{B} \leq \frac{1}{B} \quad \text{und} \quad \alpha_1 \leq A(1-\alpha_0) \leq A.$$

Es sei

$\tilde{\alpha}_0 =$  Sollwert für Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art,

$\tilde{\alpha}_1 =$  Sollwert für Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art,

und wir wählen die Schranken beim SPRT wie folgt:

$$(6) \quad A = \tilde{\alpha}_1 \quad \text{und} \quad B = 1/\tilde{\alpha}_0.$$

Dann gilt für die Istwerte  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  (tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeiten) aufgrund von (5):

$$\alpha_0 \leq \frac{1}{B} = \tilde{\alpha}_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 \leq A = \tilde{\alpha}_1.$$

Die tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeiten können dann nicht größer sein als die vorgegebenen Sollwerte.

*Liberale Variante:*

Anstelle von (6) setzen wir

$$(7) \quad A = \frac{\tilde{\alpha}_1}{1-\tilde{\alpha}_0} \quad \text{und} \quad B = \frac{1-\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_0}.$$

Dann gilt aufgrund von (4)

$$(8) \quad \alpha_0 \leq \frac{1-\alpha_1}{B} = (1-\alpha_1) \frac{\tilde{\alpha}_0}{1-\tilde{\alpha}_1} \leq \frac{\tilde{\alpha}_0}{1-\tilde{\alpha}_1}$$

$$\alpha_1 \leq A(1-\alpha_0) = (1-\alpha_0) \frac{\tilde{\alpha}_1}{1-\tilde{\alpha}_0} \leq \frac{\tilde{\alpha}_1}{1-\tilde{\alpha}_0}$$

Daraus folgt

$$\alpha_0(1-\tilde{\alpha}_1) \leq (1-\alpha_1)\tilde{\alpha}_0$$

$$\alpha_1(1-\tilde{\alpha}_0) \leq (1-\alpha_0)\tilde{\alpha}_1,$$

und durch Addition der beiden Ungleichungen ergibt sich

$$\alpha_0 + \alpha_1 \leq \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1.$$

*Beispiel*

Vorgegebene Sollwerte:  $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_1 = 0.1$ ;

konservative Variante:  $A = \tilde{\alpha}_1 = 0.1$  und  $B = 1/\tilde{\alpha}_0 = 10$ ;

liberale Variante:  $A = \frac{\tilde{\alpha}_1}{1-\tilde{\alpha}_0} = \frac{1}{9} = 0.111$  und  $B = \frac{1-\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_0} = 9$ .

### 5. Beispiel eines SPRT, der stets auf dem Rand entscheidet

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsgrößen, je mit Bernoulliverteilung  $Bi(1, p)$ ;

$H_0: p = p_0$  gegen  $H_1: p = p_1$  mit  $p_0 < p_1$ ;

(beachte: hier sind  $p, p_0, p_1$  reelle Parameter, während die gleichnamigen Größen im vorangehenden Abschnitt Wahrscheinlichkeitsfunktionen von diskreten Zufallsgrößen waren!)

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \frac{P_1 \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}}{P_0 \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}} = \frac{p_1^{k_n} (1-p_1)^{n-k_n}}{p_0^{k_n} (1-p_0)^{n-k_n}} \quad \text{mit } k_n = x_1 + \dots + x_n, x_i \in \{0,1\}.$$

Wir betrachten den Spezialfall  $p_1 = 1 - p_0, p_0 < \frac{1}{2}$ .

Dann gilt

$$\frac{p_{1n}}{p_{0n}} = \frac{(1-p_0)^{k_n} p_0^{n-k_n}}{p_0^{k_n} (1-p_0)^{n-k_n}} = \left( \frac{1-p_0}{p_0} \right)^{2k_n - n} = \lambda^{2k_n - n}, \quad \text{wobei } \lambda = \frac{1-p_0}{p_0} > 1, \text{ da } p_0 < \frac{1}{2}.$$

Nun betrachten wir den SPRT mit den Schranken  $A, B$ :

falls  $A < \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < B$ : weiter beobachten;

(9) falls  $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \leq A$ :  $H_0$  annehmen;

falls  $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \geq B$ :  $H_0$  ablehnen.

Es gilt

$$A < \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < B$$

$$\Leftrightarrow \ln A < (2k_n - n) \ln \lambda < \ln B$$

$$\Leftrightarrow -a < T_n < b$$

wobei

$$T_n = 2k_n - n;$$

$$a = \frac{-\ln A}{\ln \lambda} \quad (a > 0, \text{ da } 0 < A < 1);$$

$$b = \frac{\ln B}{\ln \lambda} \quad (b > 0, \text{ da } 1 < B < \infty).$$

Die Entscheidungsregel (9) ist also äquivalent zu:

weiter beobachten, solange  $-a < T_n < b$ ;

(10)  $H_0$  annehmen, sobald  $T_n \leq -a$ ;

$H_0$  ablehnen, sobald  $T_n \geq b$ .

*Beachte:* Die Testgröße  $T_n = 2k_n - n$  ist ganzzahlig, und sie ändert sich bei jedem Schritt  $n \rightarrow n+1$  um  $\pm 1$ . Daher bleibt der SPRT unverändert, wenn die Schranken  $a, b$  aufgerundet werden zur nächsten ganzen Zahl. Falls nun die Schranken  $a, b$  ganzzahlig sind, so entscheidet der SPRT stets auf dem Rand, und unsere Ungleichungen im vorangehenden Abschnitt werden zu Gleichungen!

*Beispiel:* Der SPRT zu den Schranken  $a = 10.3, b = 7.8$  ist äquivalent zum SPRT mit  $\tilde{a} = 11, \tilde{b} = 8$ .

Es sei also

$$p_0 < \frac{1}{2}, \quad p_1 = 1 - p_0, \quad \lambda = p_1/p_0 \quad (> 1);$$

$a, b$  ganzzahlig.

Wähle die Schranken  $A, B$  so, dass

$$a = \frac{-\ln A}{\ln \lambda} \quad \Rightarrow \quad \ln A = -a \ln \lambda \quad \Rightarrow \quad A = \lambda^{-a}$$

$$b = \frac{\ln B}{\ln \lambda} \quad \Rightarrow \quad \ln B = b \ln \lambda \quad \Rightarrow \quad B = \lambda^b.$$

Der SPRT (9) mit den Schranken  $A, B$  ist nun äquivalent zum SPRT (10) mit den ganzzahligen Schranken  $a, b$ , und somit entscheiden beide Tests stets auf dem Rand. Es seien  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  die Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art. Die Ungleichungen (4) im vorangehenden Abschnitt werden nun zu Gleichungen, und daher gilt

$$(11) \quad \alpha_0 = \frac{1 - \alpha_1}{B} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = A(1 - \alpha_0).$$

Wir wollen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  als Funktionen von  $A, B$  bzw. von  $a, b$  darstellen. Aus (11) folgt

$$\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_1}{B} \quad \text{und} \quad 1 - \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{A},$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen addieren, erhalten wir

$$\frac{\alpha_1}{A} + \frac{1 - \alpha_1}{B} = 1,$$

und daraus folgt

$$\alpha_1 = \frac{AB - A}{B - A} = \frac{B - 1}{B/A - 1} = \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^{a+b} - 1}.$$

Aus (11) ergibt sich nun

$$\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_1}{B} = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1}.$$

Somit sind die Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art exakt gegeben durch

$$\alpha_0 = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1 - p_0}{p_0} \quad (> 1).$$

*Zusammenhang mit einem Spiel:*

2 Spieler  $S_0$  und  $S_1$ ;

$p_0$  = Wahrscheinlichkeit, dass  $S_0$  eine Partie gewinnt;

$p_1 = 1 - p_0$  = Wahrscheinlichkeit, dass  $S_1$  eine Partie gewinnt;

falls  $S_0$  gewinnt:  $S_1$  zahlt 1 Euro an  $S_0$ ;

falls  $S_1$  gewinnt:  $S_0$  zahlt 1 Euro an  $S_1$ ;

$a$  = Anfangskapital von  $S_0$ ;

$b$  = Anfangskapital von  $S_1$ ;

Das Spiel wird fortgesetzt (Partie um Partie), bis einer der beiden Spieler ruiniert ist.

Es sei

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } S_0 \text{ die Partie } i \text{ gewinnt;} \\ 0 & \text{falls } S_1 \text{ die Partie } i \text{ gewinnt.} \end{cases}$$

Unentschiedene Partien werden nicht gezählt bzw. sind ausgeschlossen.

Wir betrachten nun das folgende Testproblem:

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsgrößen je mit Bernoulliverteilung  $Bi(1, p)$ ;

$H_0: p = p_0$  gegen  $H_1: p = p_1 (= 1 - p_0)$  mit  $p_0 < \frac{1}{2}$ ;

$H_0$  entspricht der Sichtweise von  $S_0$  und  $H_1$  der Sichtweise von  $S_1$ ;

$x_1, x_2, \dots$  Realisationen zu  $X_1, X_2, \dots$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ ;

$k_n = x_1 + \dots + x_n$  = Anzahl der Siege von  $S_0$  unter den ersten  $n$  Partien

$G_n = 2k_n - n$  = Gewinn von  $S_0$  nach  $n$  Partien;

$S_0$  gewinnt Partie  $n+1$ :  $G_{n+1} = G_n + 1$ ;

$S_0$  verliert Partie  $n+1$ :  $G_{n+1} = G_n - 1$ ;

weiter spielen, solange  $-a < G_n < b$ ;

sobald  $G_n = b$ , ist  $S_1$  ruiniert;

sobald  $G_n = -a$ , ist  $S_0$  ruiniert.

Offensichtlich handelt es sich hier um einen SPRT, der stets auf dem Rand entscheidet, und bei den Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  handelt es sich um die Ruinwahrscheinlichkeiten:

$\alpha_0 = P_0 \{ \text{Ablehnung von } H_0 \} = P_0 \{ G_n = b \text{ für ein } n \geq 1 \}$  = Ruinwahrscheinlichkeit für  $S_1$ ;

$\alpha_1 = P_1 \{ \text{Annahme von } H_0 \} = P_1 \{ G_n = -a \text{ für ein } n \geq 1 \}$  = Ruinwahrscheinlichkeit für  $S_0$ .

Es gilt

$$\alpha_0 = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1 - p_0}{p_0}.$$

Für  $p_0 \rightarrow \frac{1}{2}$  gilt  $\lambda \rightarrow 1$ , und wir erhalten (mit Maple bzw. mit Regel von Bernoulli-Hospital)

$$\alpha_0 = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} \frac{a}{a+b};$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} \frac{b}{a+b}.$$

## 6. Stichprobenumfang beim SPRT

Hier betrachten wir wieder den SPRT in allgemeinerer Form, und wir interessieren uns für den Erwartungswert des Stichprobenumfangs.

*Ausgangssituation*

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige, diskrete Zufallsgrößen je mit Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p$ ;

$H_0: p = p_0$  gegen  $H_1: p = p_1$ ;

beachte, dass hier  $p, p_0, p_1$  wieder Wahrscheinlichkeitsfunktionen von diskreten Zufallsgrößen sind;

$$p_{0n} = p_{0n}(x_1, \dots, x_n) = P_0 \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = p_0(x_1) \cdots p_0(x_n);$$

$$p_{1n} = p_{1n}(x_1, \dots, x_n) = P_1 \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = p_1(x_1) \cdots p_1(x_n).$$

Wir betrachten den SPRT mit den Schranken  $A, B$  ( $0 < A < 1 < B < \infty$ ):

solange  $A < \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < B$ : weiter beobachten;

sobald  $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \leq A$ :  $H_0$  annehmen;

sobald  $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \geq B$ :  $H_0$  ablehnen;

Realisationen  $(x_1, \dots, x_n)$  mit  $p_{0n}(x_1, \dots, x_n) = p_{1n}(x_1, \dots, x_n) = 0$  können unberücksichtigt bleiben, da sie keinen Einfluss auf die Erwartungswerte haben.

Es sei  $X$  eine diskrete Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p$ ; wir definieren eine neue Zufallsgröße  $Z = Z(X)$  wie folgt:

$$Z(X) = \ln \frac{p_1(X)}{p_0(X)};$$

für jede Realisation  $x$  der Zufallsgröße  $X$  erhalten wir also als zugehörige Realisation von  $Z$ :

$$z = Z(x) = \ln \frac{p_1(x)}{p_0(x)};$$

nun sind  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsgrößen je mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p$ , und wir setzen  $Z_i = Z(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ; dann sind die neuen Zufallsgrößen  $Z_1, Z_2, \dots$  unabhängig, und sie besitzen je die gleiche Verteilung. Es gilt

$$\begin{aligned} A < \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < B &\Leftrightarrow \ln A < \ln \frac{p_{1n}}{p_{0n}} < \ln B \Leftrightarrow \ln A < \sum_{i=1}^n \ln \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} < \ln B \\ &\Leftrightarrow \ln A < \sum_{i=1}^n z_i < \ln B, \end{aligned}$$

und somit kann die Entscheidungsregel zu unserem SPRT auch geschrieben werden als

solange  $\ln A < z_1 + \dots + z_n < \ln B$ : weiter beobachten;

sobald  $z_1 + \dots + z_n \leq \ln A$ :  $H_0$  annehmen;

sobald  $z_1 + \dots + z_n \geq \ln B$ :  $H_0$  ablehnen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad E_0(Z_1 + \dots + Z_n) &= E_0(N)E_0(Z) \quad (\text{Gleichung von Wald}); \\
 \text{(ii)} \quad E_0(Z_1 + \dots + Z_n) &= \underbrace{P_0\{\text{Ablehnung von } H_0\}}_{=\alpha_0} \times \underbrace{E_0(Z_1 + \dots + Z_n | \text{Ablehnung von } H_0)}_{\geq \ln B} + \\
 &\quad + \underbrace{P_0\{\text{Annahme von } H_0\}}_{=1-\alpha_0} \times \underbrace{E_0(Z_1 + \dots + Z_n | \text{Annahme von } H_0)}_{\leq \ln A} \\
 &\approx \alpha_0 \ln B + (1-\alpha_0) \ln A.
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (i) und Approximation (ii) ergibt sich

$$(12) \quad E_0(N) = \frac{E_0(Z_1 + \dots + Z_n)}{E_0(Z)} \approx \frac{\alpha_0 \ln B + (1-\alpha_0) \ln A}{E_0(Z)}.$$

Auf analoge Weise findet man

$$(13) \quad E_1(N) = \frac{E_1(Z_1 + \dots + Z_n)}{E_1(Z)} \approx \frac{(1-\alpha_1) \ln B + \alpha_1 \ln A}{E_1(Z)}.$$

Falls der SPRT stets auf dem Rand entscheidet, so werden die Approximationen (12) und (13) zu Gleichungen. Der Beweis der Gleichung von Wald findet sich im Anhang A1.

## 7. Sequentieller Test bei zusammengesetzter Hypothese und Alternative

Wir betrachten hier wieder den Spezialfall mit der Bernoulliverteilung wie im Abschnitt 5:

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsgrößen je mit einer Bernoulliverteilung  $Bi(1, p)$ ;

$H_0: p \leq p_c$  gegen  $H_1: p > p_c$  (zusammengesetzte Hypothese und Alternative);

$x_1, x_2, \dots$  Realisationen zu  $X_1, X_2, \dots$ ;  $x_i \in \{0, 1\}$ ;

$k_n = x_1 + \dots + x_n$ ;

$T_n = 2k_n - n$ .

Wir interessieren uns für den folgenden sequentiellen Test:

$a, b$  ganzzahlig,  $a, b > 0$ ;

solange  $-a < T_n < b$ : weiter beobachten;

sobald  $T_n \leq -a$ :  $H_0$  annehmen;

sobald  $T_n \geq b$ :  $H_0$  ablehnen.

Der sequentielle Test  $(T_n, a, b)$  entscheidet stets auf der Grenze, da die drei Größen  $T_n, a, b$  ganzzahlig sind, und da sich die Testgröße  $T_n$  in jedem Schritt  $n \rightarrow n+1$  um  $\pm 1$  ändert. Daher sind wir in diesem Spezialfall in der Lage, die Gütefunktion des Tests und den Erwartungswert des Stichprobenumfangs exakt zu berechnen.

### a) Gütefunktion

Es sei  $p_0 < \frac{1}{2}$  und  $p_1 = 1 - p_0$ . Der sequentielle Test  $(T_n, a, b)$  ist ein SPRT zum einfachen Testproblem

$$(14) \quad H_0: p = p_0 \quad \text{gegen} \quad H_1: p = p_1,$$

und es gilt

$$a = \frac{-\ln A}{\ln \lambda} \quad \text{und} \quad b = \frac{\ln B}{\ln \lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{p_1}{p_0} = \frac{1-p_0}{p_0}.$$

(vgl. Abschnitt 5). Es gilt

$$\alpha_0 = P_0\{\text{SPRT verwirft } H_0\} = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1}.$$

Es gilt also für den Test  $(T_n, a, b)$ :

$$\beta(p_0) = P_{p_0} \{ \text{Test } (T_n, a, b) \text{ verwirft } H_0 \} = P_0 \{ \text{SPRT verwirft } H_0 \} = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1}.$$

Dies gilt für beliebige Werte von  $p_0 < \frac{1}{2}$ , und somit haben wir für  $p < \frac{1}{2}$

$$(15) \quad \beta(p) = P_p \{ \text{Test } (T_n, a, b) \text{ verwirft } H_0 \} = \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \quad \text{mit } \lambda = \frac{1-p}{p}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Formel auch für  $p > \frac{1}{2}$  gilt. Es ist

$$\alpha_1 = P_1 \{ \text{SPRT akzeptiert } H_0 \} = \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \quad \text{mit } \lambda = \frac{1-p_0}{p_0}$$

und daraus folgt

$$1 - \alpha_1 = P_1 \{ \text{SPRT verwirft } H_0 \} = 1 - \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^{a+b} - 1} = \frac{\lambda^{a+b} - \lambda^b}{\lambda^{a+b} - 1} = \frac{\tilde{\lambda}^a - 1}{\tilde{\lambda}^{a+b} - 1},$$

wobei

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{p_0}{1-p_0} = \frac{1-p_1}{p_1}.$$

Damit gilt

$$\beta(p_1) = P_{p_1} \{ \text{Test } (T_n, a, b) \text{ verwirft } H_0 \} = P_1 \{ \text{SPRT verwirft } H_0 \} = \frac{\tilde{\lambda}^a - 1}{\tilde{\lambda}^{a+b} - 1};$$

dies gilt für beliebiges  $p_1 > \frac{1}{2}$ , und die Formel (15) gilt somit auch für  $p > \frac{1}{2}$ . Für  $p \rightarrow \frac{1}{2}$  gilt  $\lambda \rightarrow 1$  und wir erhalten (mit Maple bzw. Bernoulli-Hospital)

$$\frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} \frac{a}{a+b},$$

und damit können wir die Gütefunktion des sequentiellen Tests  $(T_n, a, b)$  schreiben als

$$\beta(p) = P_p \{ \text{Test } (T_n, a, b) \text{ verwirft } H_0 \} = \begin{cases} \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^{a+b} - 1} & \text{für } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{a}{a+b} & \text{für } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \left( \text{mit } \lambda = \frac{1-p}{p} \right)$$

### b) Stichprobenumfang

Es sei  $N$  der (zufällige) Stichprobenumfang beim Test  $(T_n, a, b)$ . Wir interessieren uns für den Erwartungswert  $E_p(N)$ . Wir betrachten wieder das einfache Testproblem

$$H_0: p = p_0 \quad \text{gegen} \quad H_1: p = p_1 \quad \text{mit } p_0 < \frac{1}{2}, p_1 = 1 - p_0.$$

Der Test  $(T_n, a, b)$  ist hier ein SPRT, der stets auf der Grenze entscheidet, und damit gilt aufgrund der Ergebnisse von Abschnitt 6

$$(16) \quad \begin{aligned} E_0(N) &= \frac{\alpha_0 \ln B + (1 - \alpha_0) \ln A}{E_0(Z)} \\ E_1(N) &= \frac{(1 - \alpha_1) \ln B + \alpha_1 \ln A}{E_1(Z)} \end{aligned}$$

wobei

$$Z = Z(X) = \ln \frac{q_1(X)}{q_0(X)} \quad \text{mit } X \sim \text{Bi}(1, p),$$

$$q_0(x) = \begin{cases} p_0 & \text{für } x = 1 \\ 1 - p_0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad q_1(x) = \begin{cases} p_1 & \text{für } x = 1 \\ 1 - p_1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wir setzen  $\lambda = (1 - p_0)/p_0$  und erhalten

$$E_0(Z(X)) = Z(0)P_0\{X=0\} + Z(1)P_0\{X=1\} = (1-p_0)\underbrace{\ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}_{=-\ln \lambda} + p_0 \underbrace{\ln \frac{p_1}{p_0}}_{=\ln \lambda} = (2p_0 - 1)\ln \lambda;$$

$$E_1(Z(X)) = Z(0)P_1\{X=0\} + Z(1)P_1\{X=1\} = (1-p_1)\underbrace{\ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}_{=-\ln \lambda} + p_1 \underbrace{\ln \frac{p_1}{p_0}}_{=\ln \lambda} = (2p_1 - 1)\ln \lambda.$$

Weiter ist

$$\alpha_0 = P_0\{\text{Ablehnung von } H_0\} = \beta(p_0),$$

$$\alpha_1 = P_1\{\text{Annahme von } H_0\} = 1 - \beta(p_1),$$

$$\ln A = -a \ln \lambda \quad \text{und} \quad \ln B = b \ln \lambda,$$

und somit ergibt sich aus (16)

$$E_0(N) = \frac{a - (a+b)\beta(p_0)}{1 - 2p_0}; \quad E_1(N) = \frac{a - (a+b)\beta(p_1)}{1 - 2p_1}.$$

Dies gilt für beliebiges  $p_0 < \frac{1}{2}$  und  $p_1 > \frac{1}{2}$ . Somit gilt für  $p \neq \frac{1}{2}$  die Gleichung

$$E_p(N) = \frac{a - (a+b)\beta(p)}{1 - 2p}.$$

Für  $p \rightarrow \frac{1}{2}$  erhalten wir (mit Maple bzw. Bernoulli-Hospital)  $E_p(N) \rightarrow ab$ , und damit haben wir die schöne Formel

$$E_p(N) = \begin{cases} \frac{a - (a+b)\beta(p)}{1 - 2p} & \text{für } p \neq \frac{1}{2} \\ ab & \text{für } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Beispiel:*

a) Sequentieller Test  $(T_n, a, b)$  mit  $a = b = 13$

**Tabelle 1:** Gütefunktion und erwarteter Stichprobenumfang

$p$	$\lambda = \frac{1-p}{p}$	$\beta(p)$	$E_p(N)$
0.35	1.875	0.00032	43.306
0.4	1.5	0.00511	64.335
0.45	1.222	0.06858	112.169
0.5	1	0.5	169
0.55	0.818	0.93142	112.169
0.6	0.667	0.99489	64.335
0.65	0.538	0.99968	43.306

b) Test mit festem Stichprobenumfang  $n$ :

$X \sim Bi(n, p)$  mit  $n = 163$ ;  $H_0$  ablehnen, falls  $X \geq 82$ . Dann gilt:

für  $p_0 = 0.4$ :  $\beta(p) = P_p\{X \geq 82\} = 0.00489$

für  $p_1 = 0.6$ :  $\beta(p) = P_p\{X \geq 82\} = 0.99511$ .

Für  $p_0 = 0.4$  und  $p_1 = 0.6$  besitzt der Test mit festem Umfang  $n$  kleinere Irrtumswahrscheinlichkeiten als der sequentielle Test, das Maximum von  $E_p(N)$  beträgt jedoch 169 und ist größer als der feste Umfang  $n = 163$ . Die Optimalität des SPRT (vgl. Abschnitt 3) bezieht sich eben nur auf die beiden Punkte  $p_0$  und  $p_1$ , und nicht auf das Maximum  $\max_{0 \leq p \leq 1} E_p(N)$ .

## 8. Sequentieller Test mit einer Bernoulli-Verteilung; numerische Berechnungen

Es seien

$X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsgrößen je mit einer Bernoulli-Verteilung  $Bi(1, p)$

$x_1, x_2, \dots$  zugehörige Realisationen

$k_n = x_1 + \dots + x_n$  (= Anzahl der defekten Stücke unter den ersten  $n$  geprüften Stücken).

Gegeben:  $a, b, c, d$  (alle  $> 0, c - d > 0$ ).

Wir betrachten den sequentiellen Test:

weiter prüfen, solange  $-a < T_n < b$ ,

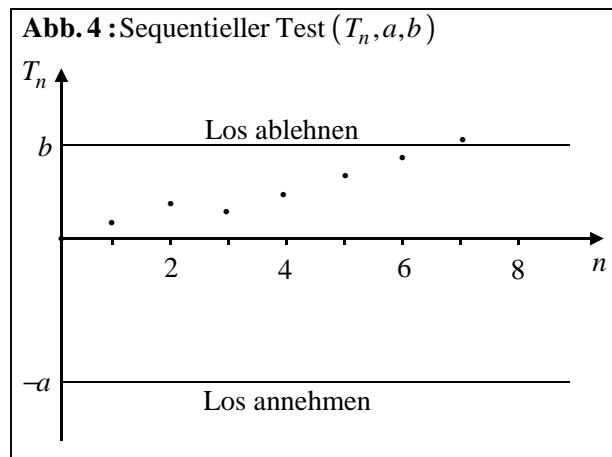
Los annehmen, sobald  $T_n \leq -a$ ,

Los ablehnen, sobald  $T_n \geq b$ ,

wobei

$$T_n = c k_n - d n.$$

Im vorangehenden Abschnitt haben wir den symmetrischen Spezialfall  $c = 2, d = 1$  untersucht, und wir haben exakte Formeln gefunden zur Berechnung von wichtigen Kenngrößen des Tests (Gütefunktion, erwarteter Stichprobenumfang). In diesem Abschnitt betrachten wir den allgemeinen Fall, und wir wollen ein Programm entwerfen zur exakten Berechnung der Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeit bei gegebenem  $p$ , sowie des Erwartungswerts des Stichprobenumfangs.



Der Verlauf des Prüfverfahrens ist hier festgelegt durch die Punktfolge  $(n, T_n), n = 0, 1, 2, \dots$ . Das Prüfverfahren endet mit der Annahme oder Ablehnung des Loses im Schritt  $N$  ( $N$  ist eine Zufallsgröße). Die Punkte  $(n, T_n)$  können in einem Koordinatensystem aufgezeichnet werden (vgl. Abb. 4).

Falls  $x_n = 0$ , so gilt  $k_n = k_{n-1}$  und  $T_n = T_{n-1} - d$ ;

falls  $x_n = 1$ , so gilt  $k_n = k_{n-1} + 1$  und  $T_n = T_{n-1} + (c - d)$ .

Der Abstand zwischen benachbarten Punkten bei festem  $n$  beträgt  $c$ , und es muss  $c - d > 0$  sein, weil sonst  $T_n$  nicht zunehmen kann mit wachsendem  $n$ ; der sequentielle Test könnte dann nie zur Ablehnung führen. Punkte mit  $-a < T_n < b$  heißen *Fensterpunkte*.

Die Anzahl der Fensterpunkte bei gegebenem  $n$  beträgt höchstens  $F = \left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor$  und mindestens  $F - 1$ .

*Aktualisierung der Fensterpunkte von Schritt  $n - 1$  auf Schritt  $n$ :*

Für die Fensterpunkte  $P_1, \dots, P_F$  im Schritt  $n - 1$  sei

$p_i =$  Wkeit, dass der Prozess im Punkt  $P_i$  landet,  $p_F = 0$  falls  $P_F$  nicht im Fenster,

$t_i =$  Wert der Teststatistik  $T_{n-1}$  im Punkt  $P_i$ ,  $(i = 1, \dots, F)$ .

1. Fall:  $t_1 - d > -a$ , d.h. Punkt  $P_1$  kann nicht zur Annahme führen

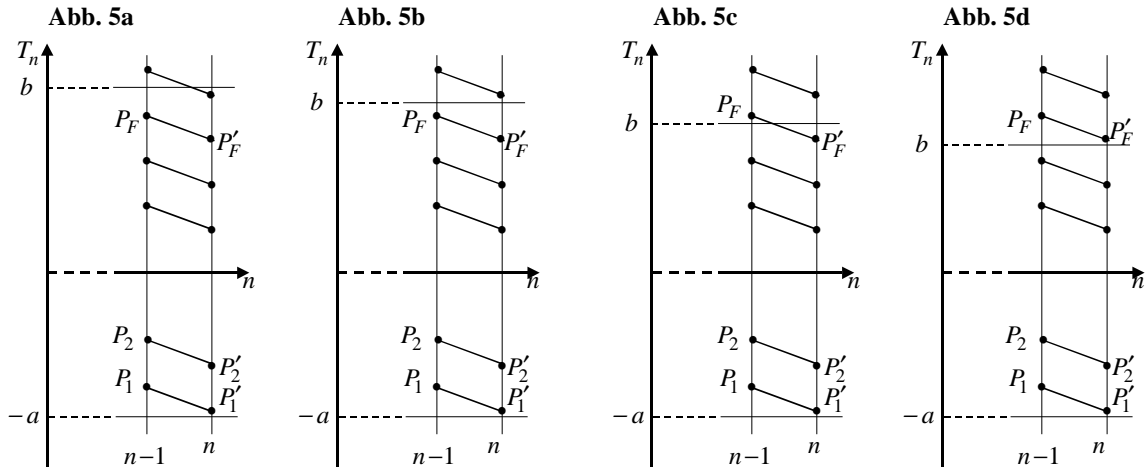
1a)  $t_F < b, t_F + (c - d) < b$  (vgl. Abb. 5a);

dieser Fall ist nicht möglich, da bei Schritt  $n$   $F + 1$  Punkte im Fenster liegen;

1b)  $t_F < b, t_F + (c - d) \geq b$  (vgl. Abb. 5b);

1c)  $t_F \geq b, t_F - c < b$  (vgl. Abb. 5c);

1d)  $t_F \geq b, t_F - c \geq b$  (vgl. Abb. 5d).



Maple-Befehle

$$t_1 := t_1 - d;$$

$$t_F := t_F - d;$$

$pan := 0;$  #  $P_1$  führt nicht zur Annahme

$prn := p_F \times p;$  #  $P_F$  muß zur Ablehnung führen, sonst  $F + 1$  Punkte im Fenster  
for  $j$  from  $F$  by  $-1$  to  $2$  do

$$p_j := p_j \times (1 - p) + p_{j-1} \times p; \quad \# p_{j-1} \text{ wird nicht überschrieben!}$$

end do;

$$p_1 := p_1 \times (1 - p);$$

if  $(t_F \geq b)$  then #  $P_F$  liegt nicht im Fenster

$$prn := prn + p_F;$$

$$p_F := 0;$$

end if;

2. Fall:  $t_1 - d \leq -a$  (Punkt  $P_1$  führt zur Annahme)

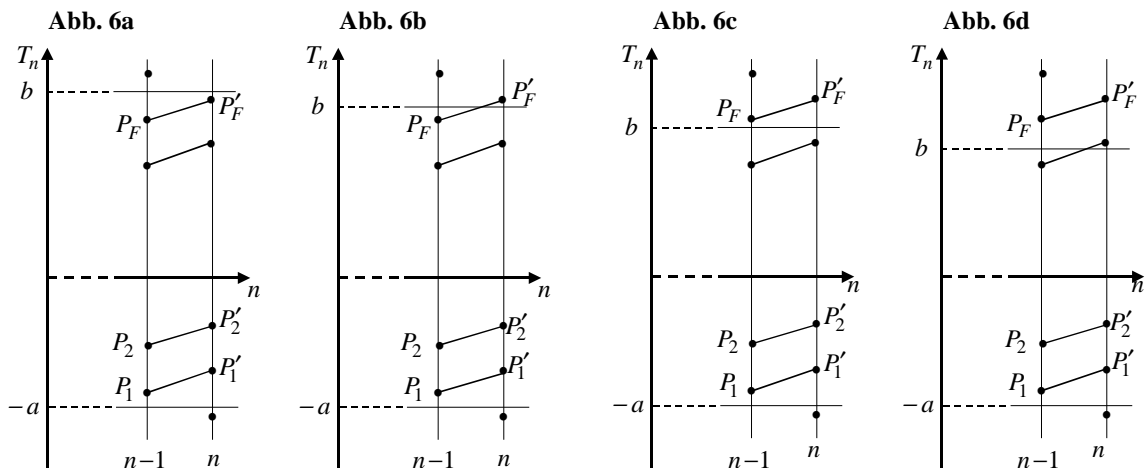
2a)  $t_F < b, t_F + (c - d) < b$  (vgl. Abb. 6a);

2b)  $t_F < b, t_F + (c - d) \geq b$  (vgl. Abb. 6b);

2c)  $t_F \geq b, t_F - c < b$  (vgl. Abb. 6c);

2d)  $t_F \geq b, t_F - c \geq b$  (vgl. Abb. 6d);

dieser Fall ist nicht möglich, da bei Schritt  $n$  nur  $F - 2$  Punkte nurim Fenster liegen.



*Maple-Befehle:*

```

t1 := t1 + c - d;
tF := tF + c - d;
pan := p1 * (1 - p);      # P1 führt zur Annahme
for j from 1 to F - 1 do
    pj := pj * p + pj+1 * (1 - p);    # pj+1 wird nicht überschrieben!
end do;
pF := pF * p;
if (tF ≥ b) then        # neuer Punkt pF liegt nicht im Fenster
    prn := pF;
    pF := 0;
else
    prn := 0;
end if;

```

Mit Hilfe der Annahme- und Ablehnungswahrscheinlichkeiten im Schritt  $n$  lassen sich nun die kumulierten Wahrscheinlichkeiten berechnen sowie der Erwartungswert des Stichprobenumfangs  $N$ :

$$\begin{aligned}
 P_p \{N = n\} &= P_p \{\text{Annahme von } H_0 \text{ im Schritt } n\} + P_p \{\text{Ablehnung von } H_0 \text{ im Schritt } n\} \\
 &= pan + prn \quad (\text{bei Schritt } n)
 \end{aligned}$$

$$P_p \{N \leq n\} = \sum_{i=1}^n P_p \{N = i\} = pankum + prnkum \quad (\text{bei Schritt } n)$$

$$P_p \{\text{Annahme von } H_0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_p \{\text{Annahme von } H_0 \text{ im Schritt } n\},$$

$$P_p \{\text{Ablehnung von } H_0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_p \{\text{Ablehnung von } H_0 \text{ im Schritt } n\},$$

$$E_p(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_p \{N = n\},$$

Die unendlichen Summen können abgebrochen werden, wenn sich die numerischen Werte nicht mehr ändern. Das vollständige Maple-Programm findet sich im Arbeitsblatt `sprt.mws`.

**Typische Aufgabe:**

$X_1, X_2, \dots$  seien unabhängige Zufallsgrößen je mit einer Bernoulli-Verteilung  $Bi(1, p)$ . Gesucht ist ein sequentieller Test  $(a, b, c, d)$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{für } p_\alpha = 0.01 \text{ sei } L(p_\alpha) \geq \alpha = 0.9$$

$$\text{für } p_\beta = 0.03 \text{ sei } L(p_\beta) \leq \beta = 0.1$$

wobei  $L(p)$  die Annahmewahrscheinlichkeit (OC-Funktion) bezeichnet.

**Lösung** (vgl. Abschnitt 4):

$$\tilde{\alpha}_0 = 1 - \alpha \quad (= \text{ Sollwert der Irrtumswkkeit 1. Art})$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \beta \quad (= \text{ Sollwert der Irrtumswkkeit 2. Art})$$

*Liberale Approximation:* Falls

$$A = \frac{\tilde{\alpha}_1}{1 - \tilde{\alpha}_0} \quad \text{und} \quad B = \frac{1 - \tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_0}$$

so gilt für die tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeiten

$$\alpha_0 < \frac{\tilde{\alpha}_0}{1 - \tilde{\alpha}_1}; \quad \alpha_1 < \frac{\tilde{\alpha}_1}{1 - \tilde{\alpha}_0}; \quad \alpha_0 + \alpha_1 \leq \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1.$$

*Konservative Approximation:* Falls

$$A = \tilde{\alpha}_1 \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0}$$

so gilt für die tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeiten

$$\alpha_0 \leq \tilde{\alpha}_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 \leq \tilde{\alpha}_1.$$

Zusammenhang zwischen  $p_\alpha, p_\beta, A, B$  und  $a, b, c, d$ :

$$a = -\ln A; \quad b = \ln B;$$

$$c = \ln \left( \frac{p_\beta (1 - p_\alpha)}{p_\alpha (1 - p_\beta)} \right); \quad d = \ln \left( \frac{1 - p_\alpha}{1 - p_\beta} \right).$$

a) *Konservative Approximation:*

Es ist

$$\tilde{\alpha}_0 = 1 - \alpha = 0.1 \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_1 = \beta = 0.1$$

$$A = \tilde{\alpha}_1 = 0.1 \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0} = 10$$

und weiter

$$a = -\ln A = \ln 10 = 2.30\dots; \quad b = \ln B = \ln 10 = 2.30\dots;$$

$$c = \ln \left( \frac{p_\beta (1 - p_\alpha)}{p_\alpha (1 - p_\beta)} \right) = \ln \frac{0.03 \times 0.99}{0.01 \times 0.97} = 1.11\dots; \quad d = \ln \left( \frac{1 - p_\alpha}{1 - p_\beta} \right) = \ln \frac{0.99}{0.97} = 0.02\dots,$$

und wir erhalten mit Hilfe von `sprt.mws`:

$p$	$L(p)$	$E_p(N)$
0.01	0.9373	216.9
0.03	0.0930	170.1

b) *Liberale Approximation:*

Es ist

$$\tilde{\alpha}_0 = 1 - \alpha = 0.1 \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_1 = \beta = 0.1$$

$$A = \frac{\tilde{\alpha}_1}{1 - \tilde{\alpha}_0} = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad B = \frac{1 - \tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_0} = 9$$

und weiter

$$a = -\ln A = \ln 9 = 2.197\dots; \quad b = \ln B = \ln 9 = 2.197\dots; \quad c, d \text{ wie bei a),}$$

und wir erhalten mit Hilfe von `sprt.mws`:

$p$	$L(p)$	$E_p(N)$
0.01	0.9317	204.2
0.03	0.1026	160.8

## c) Durch Probieren (trial and error) finden wir die folgende Lösung:

Für

$$a = 2.2, \quad b = 1.85, \quad c, d \text{ wie bei a)}$$

gilt

$$L(p_\alpha) = 0.90098 \geq \alpha = 0.9$$

$$L(p_\beta) = 0.09905 \leq \beta = 0.1$$

Die OC-Funktion  $L(p)$  und der Erwartungswert  $E_p(N)$  als Funktion von  $p$  sind gegeben in nebenstehender Tabelle. Der Erwartungswert des Stichprobenumfangs  $N$  wird maximal für  $p = 0.016$ , und er beträgt dann 223.9. Beim einfachen Prüfplan haben wir zur Lösung des gleichen Problems den Stichprobenumfang  $n = 302$  benötigt (vgl. Kapitel 2, Tabelle 4).

$p$	$L(p)$	$E_p(N)$	$P_p\{N > 300\}$
0.01	0.90098	192.43	0.1454
0.015	0.68236	222.82	0.2301
0.016	0.62679	223.90	0.2349
0.017	0.57017	223.11	0.2359
0.02	0.40744	211.02	0.2190
0.03	0.09905	137.01	0.0912

*Maple-Arbeitsblatt sprt.mws*

```

> #
> # Sequentieller Test mit Bernoulli-Verteilung
> #
> # a,b Schranken zum sequentiellen Test
> restart;
> a:=13;
> b:=13;
> # c,d Koeffizienten der Testgröße Tn = c*kn-d*n
> c:=2;
> d:=1;
> if (c-d <=0) then print("c-d muß positiv sein!") end if;
> # Maximale Anzahl der Punkte im Fenster
> F := ceil((a+b)/c);
> p := 0.4;           # Parameter der Bernoulli-Variablen
> q := 1-p;
> #
> # prob[1]..prob[F]: Wahrscheinlichkeit der Fensterpunkte
> # (vorbelegt mit 0)
> #
> prob:=array(1..F);
> for f from 1 to F do
>   prob[f] := 0;
> end do;

```

```

> # pan = Annahmewahrscheinlichkeit im Schritt n
> # prn = Ablehnungswahrscheinlichkeit im Schritt n
> # pankum = kumulierte Annahmew'keit
> # prnkum = kumulierte Ablehnungsw'keit
> pankum := 0;
> prnkum := 0;
> # Initialisierung des 1. Fensters für n=0
> k01:= -ceil(a/c)+1; # Wert von kn im 1. Fensterpunkt
> t1 := k01*c; # Wert von Tn im Fensterpunkt P1
> tF := t1+(F-1)*c; # Wert von Tn im 1. Fensterpunkt PF
> prob[-k01+1]:=1; # Wahrscheinlichkeit im Startpunkt n=0, kn=0
> # Startfenster
print("prob, kn, Tn");
for f from F by -1 to 1 do
  print(prob[f],k01+f-1,t1+(f-1)*c);
end do;
> E_N := 0; # E_N = Erwartungswert von N
> # Aktualisierung von Schritt n-1 auf n (n=1,2,...)
> unassign('n');
> for n from 1 to 1000 do
  if (n mod 100)=0 then print("n = ",n) end if;
  if (t1-d > -a) then # Punkt P1 bleibt im Fenster
    t1 := t1-d; # Wert von Tn im neuen Fensterpunkt P1
    tF := tF-d; # Wert von Tn im neuen Fensterpunkt PF
    pan := 0;
    prn := prob[F]*p;
    for f from F by -1 to 2 do
      prob[f] := prob[f]*q+prob[f-1]*p;
    end do;
    prob[1] := prob[1]*q;
    if (tF >= b) then # neuer Punkt PF im Ablehnbereich
      prn := prn+prob[F];
      prob[F] := 0;
    end if;
  else # jetzt ist (t1-d <= -a)
    t1 := t1+c-d; # Wert von Tn im neuen Fensterpunkt P1
    tF := tF+c-d; # Wert von Tn im neuen Fensterpunkt PF
    pan := prob[1]*q;
    for f from 1 to F-1 do
      prob[f] := prob[f]*p+prob[f+1]*q;
    end do;
    prob[F] := prob[F]*p;
    if (tF >= b) then # neuer Punkt PF im Ablehnbereich
      prn := prob[F];
      prob[F] := 0;
    else
      prn := 0;
    end if;
  end if;
  pankum := pankum + pan;
  prnkum := prnkum + prn;
  # Erwartungswert von N
  E_N := E_N + (pan+prn)*n;
end do;
> pankum;
> prnkum;
> pankum+prnkum;
> E_N;
> pan+prn;
>

```

## 6. Variablen-Kontrolle, Normalverteilung mit bekannter Varianz

Bisher haben wir uns mit Prüfplänen für *qualitative* Qualitätsmerkmale befasst (Attributkontrolle, Gut/Schlecht-Prüfung, zählende Prüfung). In diesem Kapitel befassen wir uns mit *quantitativen* Qualitätsmerkmalen (Variablenkontrolle, messende Prüfung).

### 1. Einseitiger Fall, untere Toleranzgrenze

$X$  = Qualitätsmerkmal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  bekannt;

$T_u$  untere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p = p(\mu) = P_\mu \{X < T_u\}$ .

Es gilt:

$$p = p(\mu) = P_\mu \{X < T_u\} = P_\mu \left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{T_u - \mu}{\sigma} \right\} = \Phi \left( \frac{T_u - \mu}{\sigma} \right);$$

$$\mu = \mu(p) = T_u - \sigma z_p.$$

Typischer Prüfplan:

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right);$$

Los ablehnen, falls  $\bar{X} < c$  ( $c$  = Annahmegrenze).

OC-Funktion (Annahmewahrscheinlichkeit):

$$1) \text{ als Funktion von } \mu: \quad L_1(\mu) = P_\mu \{ \bar{X} \geq c \} = P_\mu \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \geq \frac{c - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right\} = \Phi^c \left( \frac{c - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right);$$

$$2) \text{ als Funktion von } p: \quad L(p) = L_1(\mu(p)) = \Phi^c \left( \frac{c - \mu(p)}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi^c \left( \frac{c - T_u}{\sigma} \sqrt{n} + z_p \sqrt{n} \right).$$

*Aufgabe:*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{d.h. mit} \quad L_1(\mu_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta.$$

*Lösung:*

$$1^\circ \quad \mu_\alpha = \mu(p_\alpha) = T_u - \sigma z_{p_\alpha} = T_u + \sigma z_{1-p_\alpha}$$

$$\mu_\beta = \mu(p_\beta) = T_u - \sigma z_{p_\beta} = T_u + \sigma z_{1-p_\beta}$$

$$\text{Beachte: } p_\alpha < p_\beta \Rightarrow z_{1-p_\alpha} > z_{1-p_\beta} \Rightarrow \mu_\alpha > \mu_\beta$$

2° ( $n, c$ ) so wählen, dass

$$1) \quad L_1(\mu_\alpha) = \alpha, \quad \text{d.h.} \quad \frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} = -z_\alpha$$

$$2) \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta, \quad \text{d.h.} \quad \frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} \geq z_{1-\beta}$$

Durch Subtraktion 2) - 1) erhalten wir

$$\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} \geq z_{1-\beta} + z_\alpha, \quad \text{d.h.} \quad n \geq \left( \frac{z_{1-\beta} + z_\alpha}{\mu_\alpha - \mu_\beta} \sigma \right)^2 = \left( \frac{z_\alpha + z_{1-\beta}}{z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta}} \right)^2 (= \tilde{n}),$$

$$\text{und aus 1) finden wir dann} \quad c = \mu_\alpha - \sigma \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} = T_u + \sigma \left( z_{1-p_\alpha} - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \right).$$

*Beachte:*

1) Der Stichprobenumfang  $n$  ist unabhängig von  $\sigma$ ; er hängt nur ab von  $\alpha, \beta, p_\alpha, p_\beta$ !

2) Falls  $L_1(\mu_\alpha) = \alpha$ , so gilt  $\frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} = -z_\alpha$  und somit

$$\frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} = -z_\alpha + (z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta}) \sqrt{n},$$

d.h.  $L_1(\mu_\beta)$  ist dann unabhängig von  $\sigma$ !

*Beispiel:*

$$T_u = 200 \quad \sigma = 10$$

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.08 \quad \beta = 0.1$$

Dann gilt:

$$z_\alpha = z_{1-\beta} = z_{0.9} = 1.2816$$

$$z_{1-p_\alpha} = z_{0.99} = 2.3263$$

$$z_{1-p_\beta} = z_{0.92} = 1.4051$$

$$\mu_\alpha = \mu(p_\alpha) = T_u + \sigma z_{1-p_\alpha} = 200 + 10 \cdot 2.3263 = 223.263$$

$$\mu_\beta = \mu(p_\beta) = T_u + \sigma z_{1-p_\beta} = 200 + 10 \cdot 1.4051 = 214.051$$

$$n \geq \left( \frac{z_\alpha + z_{1-\beta}}{z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta}} \right)^2 = \left( \frac{1.2816 + 1.2816}{2.3263 - 1.4051} \right)^2 = \left( \frac{2.5632}{0.9212} \right)^2 = 7.74$$

Für  $n = 8$  erhalten wir

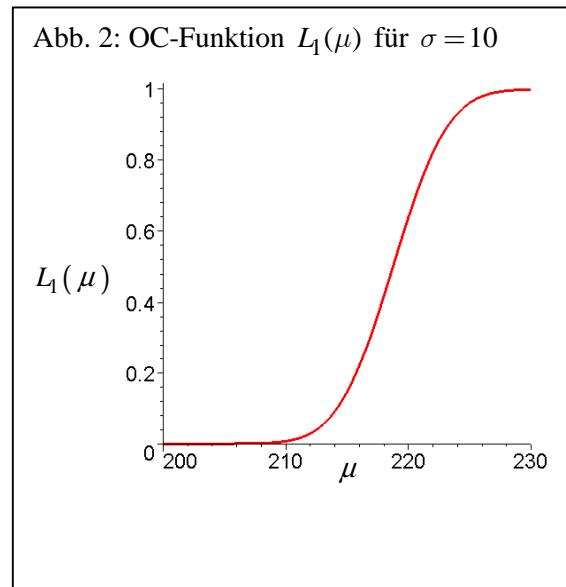
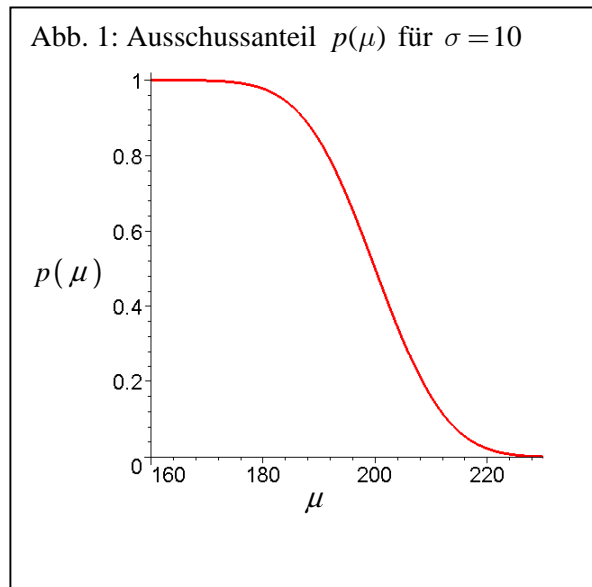
$$c = T_u + \sigma \left( z_{1-p_\alpha} - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \right) = 200 + 10 \left( 2.3263 - \frac{1.2816}{\sqrt{8}} \right) = 200 + 10 \times 1.8733 = 218.733.$$

Der gesuchte Prüfplan für  $\sigma = 10$  ist also festgelegt durch  $n = 8$  und  $c = 218.733$  und es gilt

$$L_1(\mu_\alpha) = \Phi^c \left( \frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi^c(-1.281) = \Phi(1.281) = 0.9 = \alpha;$$

$$L_1(\mu_\beta) = \Phi^c \left( \frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi^c(1.324) = 0.0927 < \beta = 0.1;$$

(vgl. Abb. 1 und 2).



*Symmetrische Lösung mit Produzentenrisiko = Konsumentenrisiko*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta (=1-\alpha)$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit

$$L(p_\alpha) \geq \alpha, \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{und} \quad 1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta).$$

Lösung:

1° Bestimme den notwendigen Stichprobenumfang wie oben.

2° Dann ist die Gleichung  $1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta)$  äquivalent zu

$$\frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} = -\frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n}$$

und daraus ergibt sich  $c = \frac{1}{2}(\mu_\alpha + \mu_\beta)$  und weiter

$$L_1(\mu_\alpha) = \Phi^c\left(\frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi^c\left(\frac{\mu_\beta - \mu_\alpha}{2\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{2\sigma} \sqrt{n}\right)$$

$$L_1(\mu_\beta) = \Phi^c\left(\frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi^c\left(\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{2\sigma} \sqrt{n}\right) = 1 - \Phi^c\left(\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{2\sigma} \sqrt{n}\right) = 1 - L_1(\mu_\alpha).$$

*Beispiel wie oben:*

$$\mu_\alpha = 223.263, \quad \mu_\beta = 214.051, \quad c = \frac{1}{2}(\mu_\alpha + \mu_\beta) = 218.657$$

$$L_1(\mu_\alpha) = \Phi\left(\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{2\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi(1.302) = 0.9035$$

$$L_1(\mu_\beta) = \Phi^c\left(\frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{2\sigma} \sqrt{n}\right) = \Phi^c(1.302) = 0.0965 \quad (=1 - L_1(\mu_\alpha)).$$

## 2. Einseitiger Fall, obere Toleranzgrenze

$X$  = Qualitätsmerkmal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  bekannt;  
 $T_o$  obere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p = p(\mu) = P_\mu \{X > T_o\}$ .

Es gilt:

$$p = p(\mu) = P_\mu \{X > T_o\} = P_\mu \left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{T_o - \mu}{\sigma} \right\} = \Phi^c \left( \frac{T_o - \mu}{\sigma} \right);$$

$$\mu = \mu(p) = T_o - \sigma z_{1-p}.$$

*Typischer Prüfplan:*

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right);$$

Los ablehnen, falls  $\bar{X} > c$  ( $c$  = Annahmegrenze).

OC-Funktion (Annahmewahrscheinlichkeit):

$$1) \text{ als Funktion von } \mu: \quad L_1(\mu) = P_\mu \{ \bar{X} \leq c \} = P_\mu \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq \frac{c - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right\} = \Phi \left( \frac{c - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right);$$

$$2) \text{ als Funktion von } p: \quad L(p) = L_1(\mu(p)) = \Phi \left( \frac{c - \mu(p)}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi \left( \frac{c - T_o}{\sigma} \sqrt{n} + z_{1-p} \sqrt{n} \right).$$

*Aufgabe:*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{d.h. mit} \quad L_1(\mu_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta.$$

*Lösung:*

$$1^\circ \quad \mu_\alpha = \mu(p_\alpha) = T_o - \sigma z_{1-p_\alpha}$$

$$\mu_\beta = \mu(p_\beta) = T_o - \sigma z_{1-p_\beta}$$

$$\text{Beachte: } p_\alpha < p_\beta \Rightarrow z_{1-p_\alpha} > z_{1-p_\beta} \Rightarrow \mu_\alpha < \mu_\beta$$

2°  $(n, c)$  so wählen, dass

$$1) \quad L_1(\mu_\alpha) = \alpha, \quad \text{d.h.} \quad \frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} = z_\alpha$$

$$2) \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta, \quad \text{d.h.} \quad \frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} \leq z_\beta \quad \text{d.h.} \quad \frac{\mu_\beta - c}{\sigma} \sqrt{n} \geq z_{1-\beta}$$

Durch Addition 1) + 2) erhalten wir

$$\frac{\mu_\beta - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} \geq z_{1-\beta} + z_\alpha, \quad \text{d.h.} \quad n \geq \left( \frac{z_\alpha + z_{1-\beta}}{\mu_\beta - \mu_\alpha} \sigma \right)^2 = \left( \frac{z_\alpha + z_{1-\beta}}{z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta}} \right)^2,$$

$$\text{und aus 1) finden wir dann} \quad c = \mu_\alpha + \sigma \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} = T_o - \sigma \left( z_{1-p_\alpha} - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \right).$$

Beachte: Der Stichprobenumfang  $n$  ist unabhängig von  $\sigma$ ; er hängt nur ab von  $\alpha, \beta, p_\alpha, p_\beta$ !

*Beispiel*

$$T_o = 220 \quad \sigma = 10$$

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.08 \quad \beta = 0.1$$

Dann gilt:

$$z_\alpha = z_{1-\beta} = z_{0.9} = 1.2816$$

$$z_{1-p_\alpha} = z_{0.99} = 2.3263$$

$$z_{1-p_\beta} = z_{0.92} = 1.4051$$

$$\mu_\alpha = \mu(p_\alpha) = T_o - \sigma z_{1-p_\alpha} = 220 - 10 \cdot 2.3263 = 196.737$$

$$\mu_\beta = \mu(p_\beta) = T_u - \sigma z_{1-p_\beta} = 220 - 10 \cdot 1.4051 = 205.949$$

$$n \geq \left( \frac{z_\alpha + z_{1-\beta}}{z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta}} \right)^2 = \left( \frac{1.2816 + 1.2816}{2.3263 - 1.4051} \right)^2 = \left( \frac{2.5632}{0.9212} \right)^2 = 7.74$$

Für  $n = 8$  erhalten wir

$$c = T_o - \sigma \left( z_{1-p_\alpha} - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \right) = 220 - 10 \left( 2.3263 - \frac{1.2816}{\sqrt{8}} \right) = 220 - 10 \times 1.8733 = 201.267.$$

Der gesuchte Prüfplan ist also festgelegt durch  $n = 8$  und  $c = 201.267$  und es gilt

$$L_1(\mu_\alpha) = \Phi \left( \frac{c - \mu_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi(1.281) = 0.9 = \alpha;$$

$$L_1(\mu_\beta) = \Phi \left( \frac{c - \mu_\beta}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \Phi(-1.324) = \Phi^c(1.324) = 0.0927 < \beta = 0.1.$$

### 3. Zweiseitige Toleranzgrenzen

$X =$  Qualitätsmerkmal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  bekannt;  
 $T_u, T_o$  untere und obere Toleranzgrenze.

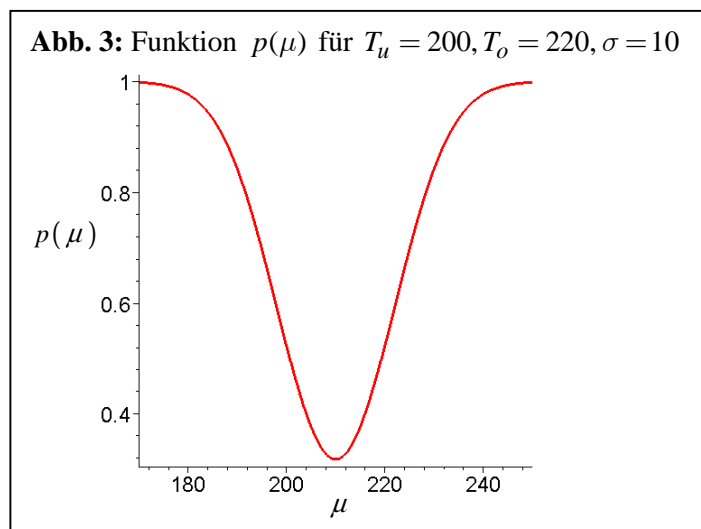
Ausschussanteil  $p = p(\mu) = P_\mu \{X < T_u\} + P_\mu \{X > T_o\}$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} p &= p(\mu) = P_\mu \{X < T_u\} + P_\mu \{X > T_o\} \\ (1) \quad &= P_\mu \left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{T_u - \mu}{\sigma} \right\} + P_\mu \left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{T_o - \mu}{\sigma} \right\} \\ &= \Phi \left( \frac{T_u - \mu}{\sigma} \right) + \Phi^c \left( \frac{T_o - \mu}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Die Funktion  $p(\mu)$  ist eintalig (d.h.  $-p(\mu)$  ist eingipflig) und symmetrisch bezüglich

$\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_o)$ . Das Minimum von  $p(\mu)$  ist  $p^* = p(\mu^*)$ . Zu jedem Wert  $p$  mit  $p^* < p < 1$  existieren zwei Werte von  $\mu$  nämlich  $\mu_\ell = \mu_\ell(p)$  und  $\mu_r = \mu_r(p)$  mit  $\mu_\ell < \mu_r$ ,  $\mu_\ell + \mu_r = 2\mu^*$  (d.h.  $\mu_\ell$  und  $\mu_r$  liegen symmetrisch zu  $\mu^*$ ) und mit  $p(\mu_\ell) = p(\mu_r) = p$  (vgl. Abb. 3). Das Minimum  $p^*$  ist bei gegebenem  $T_u$  und  $T_o$  wachsend in  $\sigma$  (vgl. Tab. 1).



**Tabelle 1**

$\sigma$	$p^*$
1	0.762 E-23
2	0.573 E-6
3	0.000858
3.88224	0.01
4	0.0124
5	0.0455
6	0.0956
7	0.1513
8	0.2113
9	0.2665
10	0.3173

*Typischer Prüfplan:*

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ ;

Los annehmen, falls  $\mu^* - c\sigma < \bar{X} < \mu^* + c\sigma$ , d.h. falls  $c_\ell < \bar{X} < c_r$   
mit  $c_\ell = \mu^* - c\sigma, c_r = \mu^* + c\sigma$ .

Bei gegebenem  $\sigma$  ist dieser Prüfplan festgelegt durch das Paar  $(n, c)$ .

OC-Funktion des Prüfplans  $(n, c)$

1) als Funktion von  $\mu$ :

$$\begin{aligned} L_1(\mu) &= P_\mu \{ \text{Prüfplan } (n, c) \text{ führt zur Annahme} \} \\ &= P_\mu \{ \mu^* - c\sigma < \bar{X} < \mu^* + c\sigma \} \\ &= P_\mu \left\{ \frac{\mu^* - \mu - c\sigma}{\sigma} \sqrt{n} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < \frac{\mu^* - \mu + c\sigma}{\sigma} \sqrt{n} \right\} \\ &= \Phi \left( \frac{\mu^* - \mu + c\sigma}{\sigma} \sqrt{n} \right) - \Phi \left( \frac{\mu^* - \mu - c\sigma}{\sigma} \sqrt{n} \right). \end{aligned}$$

Die OC-Funktion  $L_1(\mu)$  ist symmetrisch bezüglich  $\mu^*$ .

2) als Funktion von  $p$ :

Zu jedem Wert von  $p$  mit  $p^* < p < 1$  gehören zwei Werte  $\mu_\ell = \mu_\ell(p)$  und  $\mu_r = \mu_r(p)$  mit  $p(\mu_\ell) = p(\mu_r) = p$ ; die beiden Werte liegen symmetrisch zu  $\mu^*$ . Daher gilt  $L_1(\mu_\ell) = L_1(\mu_r)$  und die OC-Funktion ist somit gegeben durch

$$L(p) = L_1(\mu_\ell(p)) = \Phi \left( \frac{\mu^* - \mu_\ell + c\sigma}{\sigma} \sqrt{n} \right) - \Phi \left( \frac{\mu^* - \mu_\ell - c\sigma}{\sigma} \sqrt{n} \right).$$

*Aufgabe A:*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  so, dass

$$L(p_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{d.h. mit} \quad L_1(\mu_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta.$$

Lösung:

1° Bestimme  $\mu_\alpha = \mu_\ell(p_\alpha)$  und  $\mu_\beta = \mu_\ell(p_\beta)$ .

Beachte:  $p_\alpha < p_\beta \Rightarrow \mu_\alpha = \mu_\ell(p_\alpha) < \mu_\beta = \mu_\ell(p_\beta)$ .

2°  $(n, c)$  so wählen, dass

1)  $L_1(\mu_\alpha) = \alpha$

2)  $L_1(\mu_\beta) \leq \beta$

*Hinweis:* Benützen Sie dabei das Maple-Arbeitsblatt `var_kont.mws`.

Beachte: Im zweiseitigen Fall ist der Stichprobenumfang  $n$  abhängig von  $\sigma$  (vgl. unten).

Beispiel:

$$\begin{aligned} T_u &= 200 & T_o &= 220 & \sigma &= 3 \\ p_\alpha &= 0.01 & \alpha &= 0.9 \\ p_\beta &= 0.08 & \beta &= 0.1 \end{aligned}$$

Für  $\sigma = 3$  ist nach Tabelle 1  $p^* = \min p(\mu) = 0.000858 < p_\alpha$ , und daher ist unsere Aufgabe lösbar.

Wir finden mit Hilfe des Maple-Arbeitsblattes

var\_kont.mws:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \mu_\ell(p_\alpha) = 206.980 \\ \mu_\beta &= \mu_\ell(p_\beta) = 204.215, \end{aligned}$$

und als Lösung des (nicht-linearen) Gleichungssystems

$L_1(\mu_\alpha) = \alpha$  und  $L_1(\mu_\beta) = \beta$  erhalten wir

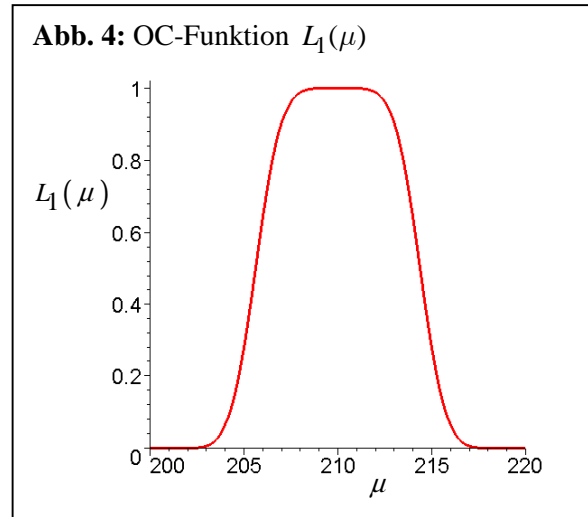
$n = \tilde{n} = 7.74$  und  $c = \tilde{c} = 1.467$ . Für  $n = 8$  erhalten wir als Lösung der (nicht-linearen) Gleichung

$L_1(\mu_\alpha) = \alpha$  den Wert  $c = 1.460$ . Somit gilt für den gesuchten Prüfplan  $n = 8$  und

$c = 1.460$ , und es ist dann

$$\begin{aligned} L_1(\mu_\alpha) &= 0.900\,000 = \alpha \\ L_1(\mu_\beta) &= 0.092\,591 < \beta = 0.1 \end{aligned}$$

(vgl. Abb. 4).



Die optimalen Prüfpläne zu unserem Beispiel für verschiedenen Werte von  $\sigma$  finden sich in Tabelle 2.

Der größtmögliche Wert von  $\sigma$ , für den die Aufgabe noch lösbar ist, ist gegeben durch

$\sigma = \sigma_{\max} = 3.88224$ , denn für diesen Wert beträgt das Minimum der Funktion  $p(\mu)$

$p^* = 0.01 = p_\alpha$ . Während der Stichprobenumfang  $n$  bei den einseitigen Toleranzgrenzen unabhängig ist von  $\sigma$ , so besteht bei den zweiseitigen Toleranzgrenzen eine schwache Abhängigkeit des Stichprobenumfangs von  $\sigma$ , und seltsamerweise wird  $\tilde{n}$  und damit auch  $n$  kleiner mit wachsendem  $\sigma$ !

**Tab. 2:** Optimale Prüfpläne  $(n, c)$  in Abhängigkeit von  $\sigma$

$\sigma$	$p^*$	$\mu_\alpha$	$\mu_\beta$	$\tilde{n}$	$\tilde{c}$	$n$	$c_\ell$	$L_1(\mu_\alpha)$	$L_1(\mu_\beta)$
0.1	$\approx 0$	200.233	200.141	7.74	98.134	8	200.187	0.9	0.092 716
0.2	$\approx 0$	200.465	200.281	7.74	48.134	8	200.375	0.9	0.092 716
0.5	0.275 E-88	201.163	200.703	7.74	18.134	8	200.937	0.9	0.092 591
1	0.762 E-23	202.326	201.405	7.74	8.134	8	201.873	0.9	0.092 716
2	0.573 E-6	204.653	202.810	7.74	3.134	8	203.747	0.9	0.092 716
3	0.000 858	206.980	204.215	7.74	1.467	8	205.621	0.9	0.092 591
3.5	0.004 275	208.192	204.918	7.51	0.984	8	206.606	0.9	0.086 288
3.8	0.008 499	209.194	205.341	6.62	0.728	7	207.426	0.9	0.087 042
3.85	0.009 393	209.498	205.411	6.39	0.685	7	207.613	0.9	0.078 813
3.87	0.009 767	209.691	205.440	6.31	0.668	7	207.696	0.9	0.075 436
3.88	0.009 957	209.868	205.454	6.26	0.660	7	207.733	0.9	0.073 754
3.882	0.009 995	209.956	205.457	6.26	0.658	7	207.741	0.9	0.073 419
3.8822	0.009 999	209.981	205.457	6.25	0.658	7	207.742	0.9	0.073 385
3.88224	0.010 000	209.994	205.457	6.25	0.658	7	207.742	0.9	0.073 378

*Aufgabe B:* Symmetrische Lösung mit Produzentenrisiko gleich Konsumentenrisiko

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  so, dass

$$L(p_\alpha) \leq \alpha, \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{und} \quad 1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta)$$

$$\text{d.h. mit } L_1(\mu_\alpha) \leq \alpha, \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta \quad \text{und} \quad 1 - L_1(\mu_\alpha) = L_1(\mu_\beta).$$

Lösung:

Bestimme die optimale Lösung  $(n, c)$  zur Aufgabe A (mit Hilfe von `var_kont.mws`), und suche durch Probieren (trial and error) den Wert von  $c$ , für den  $L_1(\mu_\alpha) = 1 - L_1(\mu_\beta)$  ist.

*Beispiel:*

$$T_u = 200 \quad T_o = 220 \quad \sigma = 3$$

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.08 \quad \beta = 0.1$$

Der optimale Prüfplan zur Aufgabe A ist gegeben durch  $n = 8$  und  $c = 1.460$ . Für  $c = 1.46749$  erhalten wir  $1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta) = 0.096243$ .

#### 4. Zweiseitige Lösung durch Kombination der einseitigen Lösungen

Wir wollen hier eine Lösung zur zweiseitigen Fragestellung untersuchen, welche sich durch Kombination der beiden einseitigen Lösungen ergibt. Falls die Varianz  $\sigma^2$  unbekannt ist, so wird sich die analoge Lösung als nützlich erweisen.

Gegeben: Obere und untere Toleranzgrenzen  $T_u, T_o$ , sowie  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$ .

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) \geq \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{d.h. mit} \quad L_1(\mu_\alpha) \geq \alpha \quad \text{und} \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta.$$

*Einseitige Prüfpläne:*

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig, je } N(\mu, \sigma^2);$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n);$$

a) bei einseitiger unterer Toleranzgrenze  $T_u$ :

Los annehmen, falls  $\bar{X} > c_\ell$ .

b) bei einseitiger oberer Toleranzgrenze  $T_o$ :

Los annehmen, falls  $\bar{X} < c_r$ .

*Zweiseitiger Prüfplan:*

Bei einem zweiseitigen Toleranzintervall  $T_u, T_o$  erhalten wir durch Kombination der beiden einseitigen Entscheidungsregeln die Vorschrift

(2) Los annehmen, falls  $c_\ell < \bar{X} < c_r$ .

Der tatsächliche Ausschussanteil bei zweiseitigen Toleranzgrenzen ist gemäß (1) gegeben durch

$$p(\mu) = P_\mu\{X < T_u\} + P_\mu\{X > T_o\} = \Phi\left(\frac{T_u - \mu}{\sigma}\right) + \Phi^c\left(\frac{T_o - \mu}{\sigma}\right)$$

(vgl. Abbildung 3 und Tabelle 1), und als OC-Funktion zum kombinierten Prüfplan erhalten wir

$$L_1(\mu) = P_\mu \{ \text{Los wird angenommen} \} \\ = P \left\{ \frac{c_\ell - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < N(0,1) < \frac{c_r - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right\} = \Phi \left( \frac{c_r - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right) - \Phi \left( \frac{c_\ell - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \right).$$

*Beispiel:*  $T_u = 200$        $T_o = 220$   
 $p_\alpha = 0.01$        $\alpha = 0.9$   
 $p_\beta = 0.08$        $\beta = 0.1$

Die optimalen einseitigen Prüfpläne für verschiedene Werte von  $\sigma$  finden sich in Tabelle 3 und 4. Aus Symmetriegründen gilt  $c_\ell + c_r = T_u + T_o = 420$ . Ebenso beträgt die Summe entsprechender  $\mu_\alpha$ - und  $\mu_\beta$ -Werte in Tabelle 3 und 4 jeweils 420. Falls  $c_\ell < c_r$ , so können die einseitigen Pläne gemäß der Entscheidungsregel (2) kombiniert werden zu einem zweiseitigen Prüfplan. Für  $\sigma = 5.33831 = \sigma_{\max}$  ist  $c_\ell = c_r = 210$ , und daher kann unser Kombinationsverfahren nicht mehr funktionieren für  $\sigma \geq \sigma_{\max}$ ; der Ablehnbereich des Prüfplans wäre dann leer, und die OC-Funktion wäre identisch Null!

Weiter hat der minimale Ausschussanteil für  $\sigma = 3.88224 = \sigma_0$  den Wert  $p^* = 0.01$  (vgl. Tabelle 1), und daher ist die Bedingung  $L(p_\alpha) \leq \alpha$  ohne Inhalt für  $\sigma > \sigma_0$ ; es existiert dann kein Wert  $\mu_\alpha$  mit  $p(\mu_\alpha) = \alpha$ . Die Werte der OC-Funktion  $L_1(\mu)$  in den Punkten  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\beta$  für die kombinierten Pläne finden sich für verschiedene Werte von  $\sigma$  in Tabelle 5. Für  $\sigma > \sigma_0$  existiert der Wert  $\mu_\alpha$  nicht, und daher geben wir dann in Tabelle 5 anstelle von  $L_1(\mu_\alpha)$  den Wert  $L_1(\mu^*)$  mit  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_o)$ . Für  $\sigma \leq 3$  (etwa) hat die OC-Funktion zum zweiseitigen Prüfplan praktisch die gleichen Werte wie bei den beiden einseitigen Prüfplänen. Für Werte von  $\sigma$  in der Nähe von  $\sigma_0 = 3.88224$  erreicht die OC-Funktion  $L_1(\mu_\alpha)$  ihr Maximum 0.953. Für  $\sigma = 4.29858 = \sigma_1$  haben wir bei den einseitigen Plänen  $\mu_\alpha^\ell = \mu_\alpha^r = 210$ , und daher hat die Gütefunktion im zweiseitigen Fall hier den Wert  $L_1(\mu^*) = 1 - 2\alpha = 0.8$ . Insgesamt stellen wir fest, dass der kombinierte Prüfplan für  $0 < \sigma < \sigma_{\max}$  keine der beiden Bedingungen  $L(p_\alpha) \geq \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$  verletzt; man beachte, dass die erste Bedingung ohne Inhalt ist für  $\sigma > \sigma_0$ .

**Tab. 3:** Linksseitige Toleranzgrenze  $T_u = 200$ :  
 Optimale Prüfpläne  $(n, c_\ell)$  in Abhängigkeit von  $\sigma$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\sigma$	$\mu_\alpha^\ell$	$\mu_\beta^\ell$	$n$	$c_\ell$	$L_1(\mu_\alpha^\ell)$	$L_1(\mu_\beta^\ell)$
0.1	200.233	200.141	8	200.187	0.9	0.092 716
0.2	200.465	200.281	8	200.375	0.9	0.092 716
0.5	201.163	200.703	8	200.937	0.9	0.092 716
1	202.326	201.405	8	201.873	0.9	0.092 716
2	204.653	202.810	8	203.747	0.9	0.092 716
3	206.979	204.215	8	205.620	0.9	0.092 716
4.29858	210	206.040	8	208.052	0.9	0.092 716
5	211.632	207.025	8	209.366	0.9	0.092 716
5.33831	212.419	207.501	8	210	0.9	0.092 716
10	223.263	214.051	8	218.733	0.9	0.092 716
20	246.527	228.101	8	237.465	0.9	0.092 716

**Tab. 4:** Rechtsseitige Toleranzgrenze  $T_o = 220$ :  
Optimale Prüfpläne  $(n, c_r)$  in Abhängigkeit von  $\sigma$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\sigma$	$\mu_\alpha^r$	$\mu_\beta^r$	$n$	$c_r$	$L_1(\mu_\alpha^r)$	$L_1(\mu_\beta^r)$
0.1	219.767	219.859	8	219.813	0.9	0.092 716
0.2	219.535	219.719	8	219.625	0.9	0.092 716
0.5	218.837	219.297	8	219.063	0.9	0.092 716
1	217.674	218.595	8	218.127	0.9	0.092 716
2	215.347	217.190	8	216.253	0.9	0.092 716
3	213.021	215.785	8	214.380	0.9	0.092 716
4.29858	210	213.960	8	211.948	0.9	0.092 716
5	208.368	212.975	8	210.634	0.9	0.092 716
5.33831	207.581	212.499	8	210	0.9	0.092 716
10	196.737	204.949	8	201.267	0.9	0.092 716
20	173.473	191.899	8	182.535	0.9	0.092 716

**Tab. 5:** Kombination der einseitigen Prüfpläne  $(n, c_\ell)$  und  $(n, c_r)$  in Abhängigkeit von  $\sigma$

(1)	(2)	(3)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\sigma$	$p^*$	$\mu_\alpha$	$\mu_\beta$	$n$	$c_\ell$	$L_1(\mu_\alpha)$	$L_1(\mu_\beta)$
0.1	< 1E-100	200.233	200.141	8	200.187	0.900 000	0.092 716
0.2	< 1E-100	200.465	200.281	8	200.375	0.900 000	0.092 716
0.5	0.275 E-88	201.163	200.703	8	200.937	0.900 000	0.092 716
1	0.762 E-23	202.326	201.405	8	201.873	0.900 000	0.092 716
2	0.573 E-6	204.653	202.810	8	203.747	0.900 000	0.092 716
3	0.000858	206.980	204.215	8	205.620	0.900 133	0.092 717
3.5	0.00427	208.192	204.918	8	206.556	0.906 829	0.092 742
3.6	0.00547	208.470	205.059	8	206.744	0.912 364	0.092 769
3.7	0.00688	208.787	205.200	8	206.931	0.921 451	0.092 816
3.8	0.00850	209.194	205.341	8	207.118	0.935 821	0.092 897
$\sigma_0 = 3.88224$	0.0100	210	205.457	8	207.272	0.953 098	0.093 001
3.9	0.0103	ex. nicht	205.482	8	207.306	0.949 302*	0.093 028
4	0.0124	ex. nicht	205.625	8	207.493	0.923 724*	0.093 232
$\sigma_1 = 4.29858$	0.0200	ex. nicht	206.057	8	208.052	0.080 000*	0.094 546
4.5	0.0263	ex. nicht	206.360	8	208.430	0.676 377*	0.096 118
4.7	0.0334	ex. nicht	206.677	8	208.804	0.528 214*	0.096 985
5	0.0455	ex. nicht	207.207	8	209.366	0.280 031*	0.084 645
5.1	0.0499	ex. nicht	207.406	8	209.554	0.195 542*	0.070 931
5.2	0.0545	ex. nicht	207.622	8	209.741	0.112 074*	0.048 825
5.3	0.0592	ex. nicht	207.861	8	209.928	0.030 552*	0.015 935
$\sigma_{\max} = 5.33831$	0.0610	ex. nicht	207.961	8	210	$\approx 0^*$	$\approx 0$

(\*) Da  $\mu_\alpha$  nicht existiert, berechnen wir hier den Wert  $L_1(\mu^*)$  mit  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_0) = 210$ .

Maple-Arbeitsblatt var\_kont0.mws:

```

> #
  # Klassische Variablenkontrolle: Quantitatives Qualitätsmerkmal
  # mit Normalverteilung mit bekannter Varianz;
  # hier: einseitige Toleranzgrenzen sowie zweiseitiger Fall
  #      als Kombination der beiden einseitigen Fälle
  #
> restart;
> Digits:=20;
> Phi:=z->0.5+0.5*erf(z/sqrt(2.0));
> Phic:=z->0.5*erfc(z/sqrt(2.0));
> # Toleranzgrenzen
> Tu:=200;
> To := 220;
> sigma:=3.0;
> # einseitig, untere Toleranzgrenze
  p := mu -> Phi((Tu-mu)/sigma);
> # zweiseitig, untere und obere Toleranzgrenze
  p2 := mu -> Phi((Tu-mu)/sigma) + Phic((To-mu)/sigma);
  plot(p(mu),mu=190..230);
> p_alpha:=0.01;
> p_beta:=0.08;
> alpha:=0.9;
> beta:=0.10;
> z_lminp_alpha := fsolve(Phi(x)=1-p_alpha,x);
> z_lminp_beta := fsolve(Phi(x)=1-p_beta,x);
> z_alpha := fsolve(Phi(x)=alpha,x);
> z_lminbeta := z_alpha;
> # einseitig, untere Toleranzgrenze
  mu1_alpha := Tu+sigma*z_lminp_alpha;
> mu1_beta := Tu+sigma*z_lminp_beta;
> p(mu1_alpha);
> p(mu1_beta);
> plot(p2(mu),mu=200..220);
> p2(210.0);
> unassign('mu');
> p_alpha;
> mu2_alpha := fsolve(p2(mu)=p_alpha,mu=200..210);
> # mu2_alpha := 210;
> mu2_beta := fsolve(p2(mu)=p_beta,mu=200..210);
> #unassign('sigma');
  #solve(Tu+sigma*z_lminp_alpha=210,sigma);
> p2(mu2_alpha);
> p2(mu2_beta);
> #
  # OC-Funktion als Funktion von mu
  # Annahmebereich: X-quer >= c
  #
> # einseitige OC-Funtion
  L1 := my -> Phic(sqrt(n)*(c-my)/sigma);
> # Kombination der beiden einseitigen OC-Funktionen
  L12:=my->Phi(sqrt(n)*(c_r-my)/sigma) + Phic(sqrt(n)*(c_l-my)/sigma) - 1;
> unassign('n');
> n :=((z_alpha+z_lminbeta)/(z_lminp_alpha-z_lminp_beta))^2 ;
> n:=8;
> unassign('c');
> c := fsolve(sqrt(n)*(c-mu1_alpha)/sigma=-z_alpha,c);
> c_l := c;
> c_r := Tu+To-c;
> evalf(L1(mu1_alpha));
> evalf(L1(mu1_beta));
> evalf(L12(mu2_alpha));
> evalf(L12(mu2_beta));
>

```

Maple-Arbeitsblatt var\_kont.mws:

```

> #
> # Klassische Variablenkontrolle:
> # Quantitatives Qualitätsmerkmal
> # mit Normalverteilung mit bekannter Varianz,
> # zweiseitige Toleranzgrenzen
> #
> restart;
> #Digits:=20;
> Phi:=z->0.5+0.5*erf(z/sqrt(2.0));
> Phic:=z->0.5*erfc(z/sqrt(2.0));
> # Zweiseitige Toleranzgrenzen
> Tu:=200;
> To:=220;
> sigma:=0.10;
> p := mu -> Phi((Tu-mu)/sigma)+Phic((To-mu)/sigma);
> #plot(p(mu),mu=190..210,`p(mu)`,font=[HELVETICA,12]);
> plot(p(mu),mu=190..230);
> mu_stern := (Tu+To)/2;
> # p* = min(p(mu)
> p_stern:=p(mu_stern);
> p_alpha:=0.01;
> p_beta:=0.08;
> alpha:=0.9;
> beta:=0.1;
> mu_alpha := fsolve(p(mu)=p_alpha,mu=210..250);
> p(mu_alpha);
> mu_beta := fsolve(p(mu)=p_beta,mu=210..250);
> p(mu_beta);
> #
> # OC-Funktion als Funktion von mu
> # Annahmebereich: mu_stern - c*sigma < X-quer < mu_stern + c*sigma
> #
> L1 := mu -> Phi(sqrt(n)*(mu_stern-mu+c*sigma)/sigma)-
> Phi(sqrt(n)*(mu_stern-mu-c*sigma)/sigma);
> fsolve({L1(mu_alpha)=alpha,L1(mu_beta)=beta},{c=60..120,n=7..10});
> n := 8;
> unassign('c');
> c:=fsolve(L1(mu_alpha)=alpha,c=90..120);
> c_l := mu_stern-c*sigma;
> evalf(L1(mu_alpha));
> evalf(L1(mu_beta));
> mu_alpha;
> mu_beta;
> plot(L1(mu),mu=200..220);
> evalf(L1(210));
>

```

## 7. Variablen-Kontrolle, Normalverteilung mit unbekannter Varianz

### 1. Vorbemerkung zur t-Verteilung

*Definition der nichtzentralen t-Verteilung*

$X$  und  $Z$  seien unabhängige Zufallsgrößen, wobei  $Z \sim N(0,1)$  und  $X \sim \chi^2(n)$ , d.h.  $Z$  besitzt eine standardisierte Normalverteilung und  $X$  eine Chi-Quadrat-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden. Dann besitzt die Zufallsgröße

$$T \sim \frac{Z + \delta}{\sqrt{X/n}}$$

eine nichtzentrale t-Verteilung mit den Parametern  $(n, \delta)$ ;  $n$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade und  $\delta$  ist der sogenannte Nichtzentralitätsparameter. Falls  $\delta = 0$ , so spricht man von der gewöhnlichen (zentralen) t-Verteilung. Die Verteilungsfunktion der nichtzentralen t-Verteilung ist gegeben durch

$$F(t) = P\{T < t\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n/2)2^{(n-2)/2}} \int_0^\infty y^{n-1} \Phi\left(\frac{ty}{\sqrt{n}} - \delta\right) \varphi(y) dy,$$

$$F^c(t) = P\{T > t\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n/2)2^{(n-2)/2}} \int_0^\infty y^{n-1} \Phi^c\left(\frac{ty}{\sqrt{n}} - \delta\right) \varphi(y) dy,$$

wobei wir mit  $\Phi$  und  $\varphi$  die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung bezeichnen, und  $\Phi^c = 1 - \Phi$  die komplementäre Verteilungsfunktion zu  $\Phi$ . Der Beweis der beiden Darstellungen findet sich im Anhang A2.

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsgrößen je mit einer Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$ . Weiter sei

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n);$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Dann gilt

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0,1);$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}}{S/\sigma} \sim t(n-1);$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{\left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \right) \sqrt{n}}{S/\sigma} \sim t(n-1, \delta) \text{ mit } \delta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, \mu_0 \in \mathbb{R}.$$

Dabei bezeichnet  $t(m)$  die (zentrale) t-Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden und  $t(m, \delta)$  die nichtzentrale t-Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden und mit Nichtzentralitätsparameter  $\delta$ .

## 2. Einseitiger Fall, untere Toleranzgrenze

$X =$  Qualitätsmerkmal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  unbekannt;

$T_u$  untere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p = p(\mu, \sigma) = P_{(\mu, \sigma)}\{X < T_u\}$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} p &= p(\mu, \sigma) = P_{(\mu, \sigma)}\{X < T_u\} = P_{(\mu, \sigma)}\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{T_u - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{T_u - \mu}{\sigma}\right); \\ \Rightarrow \frac{T_u - \mu}{\sigma} &= z_p = -z_{1-p} \\ \Rightarrow \mu &= \mu(p, \sigma) = T_u + \sigma z_{1-p} \\ \Rightarrow \frac{\mu(p, \sigma) - T_u}{\sigma} &= z_{1-p}. \end{aligned}$$

*Typischer Prüfplan:*

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ ;

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  (erwartungstreue Schätzfunktion für unbekannte Varianz  $\sigma^2$ );

Los annehmen, falls  $\frac{\bar{X} - T_u}{S} \sqrt{n} > c$  ( $c =$  Annahmegränze).

OC-Funktion (Annahmewahrscheinlichkeit):

1) als Funktion von  $\mu$ :

$$L_1(\mu) = P_{(\mu, \sigma)}\left\{\frac{\bar{X} - T_u}{S} \sqrt{n} > c\right\} = P\{t(n-1, \delta) > c\} \quad \text{mit } \delta = \frac{\mu - T_u}{\sigma} \sqrt{n};$$

2) als Funktion von  $p$ :

Es gilt

$$\frac{\mu(p, \sigma) - T_u}{\sigma} = z_{1-p},$$

und somit erhalten wir

$$L(p) = L_1(\mu(p, \sigma)) = P\{t(n-1, \delta) > c\} \quad \text{mit } \delta = \frac{\mu(p, \sigma) - T_u}{\sigma} \sqrt{n} = z_{1-p} \sqrt{n}.$$

*Beachte:*

Die OC-Funktion als Funktion von  $\mu$  ist abhängig von der unbekannt Standardabweichung  $\sigma$ , die OC-Funktion als Funktion von  $p$  hängt jedoch nur von  $p$  ab und ist unabhängig vom unbekanntem Wert  $\sigma$ ! Ferner ist die Funktion  $L(p)$  auch unabhängig von der Toleranzgrenze  $T_u$ !

*Aufgabe:*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit

$$L(p_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta.$$

*Lösung:*

1° Wähle Startwert für  $n$ .

2° Berechne  $\delta_\alpha = z_{1-p_\alpha} \sqrt{n}$ ; bestimme  $c$  so, dass  $L(p_\alpha) = P\{t(n-1, \delta_\alpha) > c\} = \alpha$ .

3° Berechne  $\delta_\beta = z_{1-p_\beta} \sqrt{n}$ ; berechne  $L(p_\beta) = P\{t(n-1, \delta_\beta) > c\}$ ;

falls  $L(p_\beta) \leq \beta$ :  $n$  verkleinern;

falls  $L(p_\beta) > \beta$ :  $n$  vergrößern;

dann zurück zu 2°.

Auf diese Weise kann man den kleinsten Wert von  $n$  finden mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$ . Einen sinnvollen Startwert für  $n$  kann man finden mit Hilfe der folgenden Formeln (vgl. Anhang A3):

$$(1) \quad n \approx \frac{1}{(z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta})^2} \left( z_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\alpha}^2} + z_{1-\beta} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\beta}^2} \right)^2;$$

im Spezialfall  $\alpha = 1 - \beta$  kann man die Formel vereinfachen zu

$$(2) \quad n \approx \frac{4z_\alpha^2}{(z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta})^2} \left( 1 + \frac{1}{8} (z_{1-p_\alpha} + z_{1-p_\beta})^2 \right).$$

*Beispiel:*

$$T_u = 200$$

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.08 \quad \beta = 0.1$$

Die Näherungsformel (2) liefert  $n \approx 21.2$ , und mit Hilfe des Maple-Arbeitsblattes `var_kon1.mws` finden wir die folgenden Werte:

$n$	$c$	$L(p_\alpha)$	$L(p_\beta)$
10	5.422	0.9000	0.3084
20	8.348	0.9000	0.1206
21	8.598	0.9000	0.1097
22	8.841	0.9000	0.0998
25	9.542	0.9000	0.0750

Für den gesuchten Prüfplan gilt also  $n = 22$  und  $c = 8.841$ .

Für die symmetrische Lösung mit  $L(p_\beta) = 1 - L(p_\alpha)$  gilt  $n = 22$  und  $c = 8.8404$ ; es ist dann

$$L(p_\alpha) = 0.9001 \quad \text{und} \quad L(p_\beta) = 0.0999.$$

Beim analogen Problem mit bekannter Varianz beträgt der minimale Stichprobenumfang  $n = 8$  (unabhängig von  $\sigma$ ).

### 3. Einseitiger Fall, obere Toleranzgrenze

$X =$  Qualitätsmerkmal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  unbekannt;

$T_o$  obere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p = p(\mu, \sigma) = P_{(\mu, \sigma)}\{X > T_o\}$ .

Es gilt:

$$p = p(\mu, \sigma) = P_{(\mu, \sigma)}\{X > T_o\} = P_{(\mu, \sigma)}\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{T_o - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi^c\left(\frac{T_o - \mu}{\sigma}\right);$$

$$\Rightarrow \frac{T_o - \mu}{\sigma} = z_{1-p}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu(p, \sigma) = T_o - \sigma z_{1-p}$$

$$\Rightarrow \frac{T_o - \mu(p, \sigma)}{\sigma} = z_{1-p}.$$

*Typischer Prüfplan:*

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right);$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{erwartungstreue Schätzfunktion für unbekannte Varianz } \sigma^2);$$

Los annehmen, falls  $\frac{T_o - \bar{X}}{S} \sqrt{n} \geq c$  ( $c =$  Annahmegränze).

OC-Funktion (Annahmewahrscheinlichkeit):

1) als Funktion von  $\mu$ :

$$L_1(\mu) = P_{(\mu, \sigma)}\left\{\frac{T_o - \bar{X}}{S} \sqrt{n} \geq c\right\} = P\{t(n-1, \delta) \geq c\} \quad \text{mit } \delta = \frac{T_o - \mu}{\sigma} \sqrt{n};$$

2) als Funktion von  $p$ :

Es gilt

$$\frac{T_o - \mu(p, \sigma)}{\sigma} = z_{1-p},$$

und somit erhalten wir

$$L(p) = L_1(\mu(p, \sigma)) = P\{t(n-1, \delta) \geq c\} \quad \text{mit } \delta = \frac{T_o - \mu(p, \sigma)}{\sigma} \sqrt{n} = z_{1-p} \sqrt{n}.$$

*Beachte:*

Die OC-Funktion als Funktion von  $\mu$  ist abhängig von der unbekannt Standardabweichung  $\sigma$ , die OC-Funktion als Funktion von  $p$  hängt jedoch nur von  $p$  ab und ist unabhängig vom unbekannt Wert  $\sigma$ ! Weiter ist die Funktion  $L(p)$  auch unabhängig von der Toleranzgrenze  $T_o$ , und sie ist identisch zur entsprechenden OC-Funktion bei einer einseitigen unteren Toleranzgrenze. Der optimale Prüfplan  $(n, c)$  mit  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$  kann daher auf die gleiche Weise bestimmt werden wie im Falle der unteren Toleranzgrenze.

#### 4. Zweiseitiger Fall, untere und obere Toleranzgrenze

$X =$  Qualitätsmerkmal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  unbekannt;

$T_u, T_o$  untere und obere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p = p(\mu, \sigma) = P_{\mu, \sigma} \{X < T_u\} + P_{\mu, \sigma} \{X > T_o\}$ .

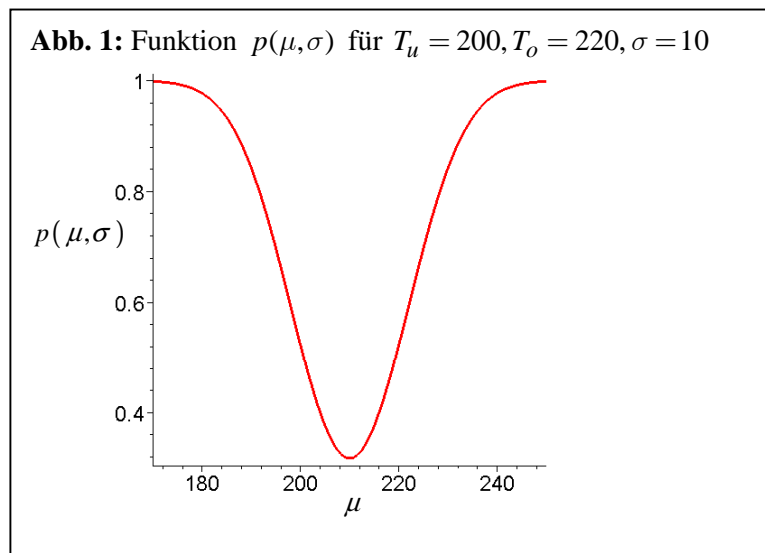
Es gilt:

$$\begin{aligned} p &= p(\mu, \sigma) = P_{\mu, \sigma} \{X < T_u\} + P_{\mu, \sigma} \{X > T_o\} \\ &= P_{\mu, \sigma} \left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{T_u - \mu}{\sigma} \right\} + P_{\mu, \sigma} \left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{T_o - \mu}{\sigma} \right\} \\ &= \Phi \left( \frac{T_u - \mu}{\sigma} \right) + \Phi^c \left( \frac{T_o - \mu}{\sigma} \right) = \Phi \left( \frac{\mu^* - \mu - d}{\sigma} \right) + \Phi^c \left( \frac{\mu^* - \mu + d}{\sigma} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_o)$  und  $d = \frac{1}{2}(T_o - T_u)$ . Die Funktion  $p(\mu, \sigma)$  ist für festes  $\sigma$  eintalig, d.h.

$-p(\mu, \sigma)$  ist eingipflig, und sie ist symmetrisch bezüglich  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_o)$ . Das Minimum von

$p(\mu, \sigma)$  bei gegebenem  $\sigma$  ist  $p^*(\sigma) = p(\mu^*, \sigma)$ ;  $p^*$  ist bei gegebenem  $T_u$  und  $T_o$  wachsend in  $\sigma$  (vgl. Abbildung 1 und Tabelle 1).



**Tabelle 1**

$\sigma$	$p^*(\sigma)$
1	0.762 E-23
2	0.573 E-6
3	0.000858
3.88224	0.01
4	0.0124
5	0.0455
6	0.0956
7	0.1513
8	0.2113
9	0.2665
10	0.3173

#### Typischer zweiseitiger Prüfplan

Wir wollen uns überlegen, welche Gestalt ein sinnvoller zweiseitiger Prüfplan haben sollte.

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ ;

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ;

im Falle einer unteren Toleranzgrenze  $T_u$ :

Los annehmen, falls  $\frac{\bar{X} - T_u}{S} \sqrt{n} > c$ , d.h. falls  $\bar{X} > T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}}$ ;

im Falle einer oberen Toleranzgrenze  $T_o$ :

Los annehmen, falls  $\frac{T_o - \bar{X}}{S} \sqrt{n} > c$ , d.h. falls  $\bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}}$ .

Wenn wir die beiden Vorschriften kombinieren, erhalten wir

(3) Los annehmen, falls  $T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < \bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}}$ .

Das kombinierte Verfahren kann nur zur Annahme führen, wenn die untere Schranke kleiner ist als die obere:

$$T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}}, \text{ d.h. } S < \frac{\sqrt{n}}{2c}(T_o - T_u) = s_{\max}.$$

OC-Funktion (Annahmewahrscheinlichkeit) des zweiseitigen Prüfplans (3):

1) als Funktion von  $\mu$ :  $L_1(\mu) = P_{(\mu, \sigma)} \left\{ T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < \bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}} \right\}$ .

Eine Annahme nur möglich, wenn die Bedingung  $B = \{S < s_{\max}\}$  eintritt, und somit können wir schreiben

$$L_1(\mu) = P(B) \times P_{(\mu, \sigma)} \left\{ T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < \bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}} \mid B \right\};$$

der zweite Faktor kann nun zerlegt werden in

$$(4) \quad \begin{aligned} P_{(\mu, \sigma)} \left\{ T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < \bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}} \mid B \right\} &= \\ &= P_{(\mu, \sigma)} \left\{ c < \frac{\bar{X} - T_u}{S} \sqrt{n} \mid B \right\} + P_{(\mu, \sigma)} \left\{ \frac{\bar{X} - T_o}{S} \sqrt{n} < -c \mid B \right\}. \end{aligned}$$

Nun gilt zwar

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X} - T_u}{S} \sqrt{n} &\sim t(n-1, \delta) \quad \text{mit } \delta = \frac{\mu - T_u}{\sigma} \sqrt{n}, \\ \frac{\bar{X} - T_o}{S} \sqrt{n} &\sim t(n-1, \delta) \quad \text{mit } \delta = \frac{\mu - T_o}{\sigma} \sqrt{n}, \end{aligned}$$

aber die beiden Zufallsgrößen sind nicht unabhängig von der Bedingung  $B = \{S < s_{\max}\}$ , und somit ist die numerische Berechnung von (4) wohl nicht einfach. Die OC-Funktion  $L_1(\mu)$  hängt also auch ab von der unbekannt Standardabweichung  $\sigma$ , und die numerische Berechnung als Funktion von  $(\mu, \sigma)$  scheint nicht einfach zu sein.

2) als Funktion von  $p$ :

Die Funktion  $p(\mu, \sigma)$  ist bei gegebenem  $\sigma$  eintalig und symmetrisch bezüglich  $\mu^*$ , und das Minimum ist gegeben durch  $p^*(\sigma) = p(\mu^*, \sigma)$  (vgl. Abb. 1 und Tab. 1). Daher gehören zu jedem Wert von  $p$  mit  $p^*(\sigma) < p < 1$  zwei Werte  $\mu_\ell = \mu_\ell(p, \sigma)$  und  $\mu_r = \mu_r(p, \sigma)$  mit

$p(\mu_\ell) = p(\mu_r) = p$ ; die beiden Werte liegen symmetrisch zu  $\mu^*$ . Es gilt  $L_1(\mu_\ell) = L_1(\mu_r)$ , und somit können wir schreiben  $L(p) = L_1(\mu_\ell(p, \sigma))$ . Auch die Funktion  $L(p)$  hängt ab von der unbekannt Standardabweichung  $\sigma$ , sie ist nur definiert für  $p^*(\sigma) \leq p \leq 1$ , und ihre numerische Berechnung als Funktion von  $(p, \sigma)$  scheint ebenfalls nicht einfach zu sein. Wir werden daher die OC-Funktion in unserem Beispiel durch Simulation bestimmen.

*Aufgabe*

Gegeben: Zweiseitige Toleranzgrenzen  $T_u, T_o$ , sowie  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$ .

Gesucht: Prüfplan  $(n, c)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  so, dass

$$L(p_\alpha) \geq \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{d.h. mit} \quad L_1(\mu_\alpha) \geq \alpha \quad \text{und} \quad L_1(\mu_\beta) \leq \beta.$$

Lösung: Die beiden einseitigen Probleme bei unbekannter Standardabweichung konnten wir uneingeschränkt lösen; bei gegebenen Punkten  $(p_\alpha, \alpha)$  und  $(p_\beta, \beta)$  existiert ein Prüfplan  $(n, c)$  so, dass für beide einseitigen OC-Kurven gilt:  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$ . Wir kombinieren nun die beiden einseitigen Lösungen zu einem zweiseitigen Prüfplan

$$(5) \quad \text{Los annehmen, falls} \quad T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < \bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}};$$

zusätzlich stellen wir die Forderung: Los ablehnen, falls  $S > s_{\text{crit}}$ , wobei der kritische Wert  $s_{\text{crit}}$  durch Probieren (trial and error) zu bestimmen ist.

*Beispiel*

$$T_u = 200 \quad T_o = 220$$

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.08 \quad \beta = 0.1$$

Für die beiden einseitigen Probleme haben wir die Lösung  $(n, c) = (22, 8.841)$  gefunden (unabhängig von  $\sigma$ ), und damit ergibt sich

$$s_{\text{max}} = \frac{\sqrt{n}}{2c}(T_o - T_u) = \frac{\sqrt{22}}{2 \times 8.841}(220 - 200) = 5.305.$$

Wir wollen nun zunächst den zweiseitigen Prüfplan (5) untersuchen ohne Zusatzforderung; wir möchten wissen, wie sich die Werte  $L(p_\alpha)$  und  $L(p_\beta)$  verhalten als Funktion von  $\sigma$ . Wir wollen diese Werte schätzen mit einer Simulationsstudie. Die Studie führen wir durch mit Minitab (Version 14), und die Ergebnisse finden sich in Tabelle 2.

*Simulationsstudie mit Minitab (Ergebnisse in Tabelle 2)*

1. Setze 123 als Startwert des Zufallszahlengenerators.
2. Erzeuge in den Spalten  $c_1, \dots, c_{22}$  je  $M = 10\,000$  Zufallszahlen gemäss  $N(\mu, \sigma)$ , wobei  $\mu = \mu_\alpha = 204.654$  und  $\sigma = 2$ . Nun enthält jede der  $M$  Zeilen eine Zufallsstichprobe aus einer Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  vom Umfang  $n = 22$ .
3. Berechne für jede der  $M$  Stichproben das arithmetische Mittel  $\bar{x}_i$  und die Standardabweichung  $s_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ).
4. Berechne zu jeder Stichprobe die Schranken
 
$$u_i = T_u + \frac{cs_i}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad o_i = T_o - \frac{cs_i}{\sqrt{n}}.$$
5. Bestimme die Anzahl der Stichproben mit  $u_i \geq o_i$  (untere Schranke größer als obere Schranke). Die Häufigkeit beträgt 0, und sie findet sich in Spalte (4), Zeile 1.
6. Bestimme die Anzahl der Stichproben mit  $u_i < \bar{x}_i < o_i$ ; bei diesen Stichproben wird das Los angenommen. Die Häufigkeit beträgt 8966, und sie findet sich in Spalte (5), Zeile 1.

Analog werden die übrigen Einträge in den Spalten (4) und (5) sowie (7) und (8) von Tabelle 2 bestimmt.

*Minitab-Befehle zur Simulationsstudie*

```

Base 123.
Random 10000 c21-c42;
  Normal 202.326 1.
RMean C21-C42 c1.           # berechnet xiquer
RStDev C21-C42 c2.          # berechnet si
let k1 = 8.841
let c3 = 200+k1*c2/sqrt(22)  # berechnet ui
let c4 = 220-k1*c2/sqrt(22) # berechnet oi
let c5 = c4-c3
Code (-100:0) 0 (0:100) 1 c5 c6 # ui < oi?
let c7 = c4-c1
let c8 = c1-c3
Code (-100:0) 0 (0:100) 1 c7 c9 # xiquer < oi?
Code (-100:0) 0 (0:100) 1 c8 c10 # xiquer > ui?
let c11 = c9*c10             # ui < xiquer < oi?
tally c6 c9 c10 c11
# Code (0:4.6) 1 (4.6:100) 0 c2 c12 # si < 4.6?
# let c13 = c11*c12
# tally c6 c9 c10 c11 c12 c13

```

Aufgrund der Häufigkeiten in Tabelle 2 können wir die Werte  $L(p_\alpha)$  und  $L(p_\beta)$  der OC-Funktion schätzen. Man beachte, dass die Werte  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\beta$  in den Spalten (3) und (6) so bestimmt sind, dass  $\mu_\alpha, \mu_\beta \leq \mu^* = 210$  und dass der Ausschussanteil  $p(\mu_\alpha, \sigma) = p_\alpha$  und  $p(\mu_\beta, \sigma) = p_\beta$  beträgt. Für  $\sigma = 1$  und  $\mu_\alpha = 202.326$  beträgt also der Ausschussanteil  $p(\mu_\alpha, \sigma) = p_\alpha = 0.01$ , und in der Simulation wird das Los in diesem Fall in 8963 Fällen angenommen; daher ist  $L(p_\alpha) \approx 8963/M = 0.8963$ . Für die Schätzwerte  $\hat{p} = k/M$  finden wir im ungünstigsten Fall  $\hat{p} = \frac{1}{2}$  das folgende Konfidenzintervall zum Sicherheitsgrad von 95%:

$$\hat{p} \pm z_{0.95} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{M}} = \hat{p} \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{4M}} \approx \hat{p} \pm 0.010.$$

Die Tabelle zeigt nun, dass beim kombinierten Verfahren der Wert der OC-Funktion im relevanten Bereich  $0 < \sigma \leq \sigma_0$  nie signifikant kleiner ist als  $\alpha = 0.9$ ; der Produzent wird also gegen diesen Prüfplan keine Einwände erheben. Andererseits wird für  $\sigma_1 = 5.71204$  und  $\mu_\beta = 210$  das Los in 1929 Fällen angenommen, und damit beträgt der Wert  $L(p_\beta)$  in diesem ungünstigsten Fall etwa  $0.2 = 2\beta$ ; der Produzent fährt seine Produktion mit 8% Ausschuss, und der Konsument nimmt die Lose an mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 20%. Der Konsument wird daher mit dieser Lösung nicht zufrieden sein, da sein vorgegebenes Konsumentenrisiko von 10% deutlich überschritten wird. Eine einfache Zusatzbedingung kann diesen Mangel weitgehend beheben.

In Tabelle 3a betrachten wir den zweiseitigen Prüfplan (5) mit der zusätzlichen Forderung:

Los ablehnen, falls  $S > s_{\text{crit}} = 4.6$ .

Eine solche Forderung ist natürlich, denn falls die Standardabweichung  $\sigma > \sigma_1 = 5.71204$  ist, so ist der minimale Ausschussanteil  $p^* > 0.08 = p_\beta$ ; eine große empirische Standardabweichung  $S$  ist also ein Hinweis auf eine möglicherweise zu schlecht eingestellte Produktion. In Tabelle 3a sind nun die Ergebnisse der Simulationsstudie zu finden für den erweiterten zweiseitigen Prüfplan

(6) Los annehmen, falls  $T_u + \frac{cS}{\sqrt{n}} < \bar{X} < T_o - \frac{cS}{\sqrt{n}}$  und falls  $S < s_{\text{crit}} = 4.6$ .

Die Tabelle wurde auf ganz analoge Weise berechnet wie Tabelle 2. Sie zeigt, dass jetzt  $L(p_\alpha)$  im relevanten Bereich  $0 < \sigma < \sigma_0 = 3.88224$  nie signifikant kleiner ist als  $\alpha = 0.9$ , und dass  $L(p_\beta)$  im

relevanten Bereich  $0 < \sigma < \sigma_1 = 5.71204$  nie signifikant größer ist als  $\beta = 0.1$ . Für  $\sigma = 4$  z.B. beträgt der minimale Ausschussanteil  $p^* = p(\mu^*, \sigma) = 0.0124 > p_\alpha$ , und in diesem Fall wird ein Los nur in 8445 Fällen angenommen, worüber sich der Produzent nicht beklagen kann, da ja  $p^* > p_\alpha$ . Für  $\sigma > \sigma_1 = 5.71204$  gilt für den minimalen Ausschussanteil  $p^* = p(\mu^*, \sigma) > 0.08 = p_\beta$ , und der Konsument wird sich auch nicht beklagen, denn die Annahmewahrscheinlichkeit sinkt sehr schnell gegen Null.

Tabelle 3b entspricht der Tabelle 3a, nur ist hier der kritische Wert  $s_{\text{crit}} = 4.6$  von Tabelle 3a ersetzt durch den Wert  $s_{\text{crit}} = 4.7$ . Dies erhöht die Annahmewahrscheinlichkeiten  $L(p_\alpha)$  vor allem in der Nähe von  $\sigma_0$ , und die Werte  $L(p_\beta)$  vor allem in der Nähe von  $\sigma_1$ . Die Wahrscheinlichkeiten  $L(p_\beta)$  betragen jetzt im ungünstigsten Fall etwa  $0.12 > \beta = 0.1$ , und somit wird der Konsument den Prüfplan von Tabelle 4a vorziehen.

**Tabelle 2:** Zweiseitiger Prüfplan (5) mit  $n = 22$ ,  $c = 8.841$  (ohne Zusatzforderung)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\sigma$	$p^*$	$\mu_\alpha$	$u_i \geq o_i$	Los ann.	$\mu_\beta$	$u_i \geq o_i$	Los ann.
1	0.762 E-23	202.326	0	8963	201.405	0	1020
2	0.573 E-6	204.653	0	8966	202.810	0	1020
3	0.000858	206.980	0	8969	204.215	0	1020
3.5	0.00427	208.192	9	9031	204.918	9	1021
3.6	0.00547	208.470	15	9080	205.059	15	1022
3.7	0.00688	208.787	38	9183	205.200	38	1023
3.8	0.00850	209.194	68	9304	205.341	68	1024
$\sigma_0 = 3.88224$	0.0100	210	109	9540	205.457	109	1024
3.9	0.0103	ex. nicht	118*	9498*	205.482	118	1024
4	0.0124	ex. nicht	183*	9270*	205.625	183	1027
4.1	0.0147	ex. nicht	287*	8977*	205.768	287	1028
4.5	0.0263	ex. nicht	1095*	7367*	206.360	1095	1072
5	0.0455	ex. nicht	3028*	4786*	207.207	3028	1221
5.5	0.0690	ex. nicht	5419*	2587*	208.456	5419	1638
5.6	0.0741	ex. nicht	5858*	2242*	208.874	5858	1771
5.7	0.0794	ex. nicht	6306*	1951*	209.629	6306	1906
$\sigma_1 = 5.71204$	0.0800	ex. nicht	6356*	1929*	210	6356	1929
5.8	0.0847	ex. nicht	6714*	1698*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
6	0.0956	ex. nicht	7357*	1270*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
7	0.1531	ex. nicht	9350*	208*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
8	0.2113	ex. nicht	9864*	36*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
9	0.2665	ex. nicht	9972*	6*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
10	0.3173	ex. nicht	9998*	0*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)

(\*) Da  $\mu_\alpha$  nicht existiert, wird die Simulation hier mit  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_0) = 210$  durchgeführt.

**Tabelle 3a:** Zweiseitiger Prüfplan (6) mit  $n = 22$ ,  $c = 8.841$ ,  $s_{\text{crit}} = 4.6$ 

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\sigma$	$p^*$	$\mu_\alpha$	$s > s_{\text{max}}$	Los ann.	$\mu_\beta$	$s > s_{\text{max}}$	Los ann.
1	0.762 E-23	202.326	0	8963	201.405	0	1020
2	0.573 E-6	204.653	0	8966	202.810	0	1020
3	0.000858	206.980	4	8969	204.215	4	1020
3.5	0.00427	208.192	219	9001	204.918	219	1021
3.6	0.00547	208.470	356	9010	205.059	356	1022
3.7	0.00688	208.787	551	9007	205.200	551	1023
3.8	0.00850	209.194	789	8943	205.341	789	1024
$\sigma_0 = 3.88224$	0.0100	210	1034	8902	205.457	1034	1024
3.9	0.0103	ex. nicht	1091*	8840*	205.482	1091	1024
4	0.0124	ex. nicht	1454*	8445*	205.625	1454	1027
4.1	0.0147	ex. nicht	1856*	8009*	205.768	1856	1028
4.5	0.0263	ex. nicht	3907*	5858*	206.360	3907	1062
5	0.0455	ex. nicht	6587*	3183*	207.207	6587	1110
5.5	0.0690	ex. nicht	8313*	1492*	208.456	8313	1082
5.6	0.0741	ex. nicht	8558*	1240*	208.874	8558	1068
5.7	0.0794	ex. nicht	8759*	1065*	209.629	8759	1056
$\sigma_1 = 5.71204$	0.0800	ex. nicht	8787*	1046*	210	8787	1046
5.8	0.0847	ex. nicht	8970*	891*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
6	0.0956	ex. nicht	9264*	632*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
7	0.1531	ex. nicht	9876*	92**	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
8	0.2113	ex. nicht	9981*	17*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
9	0.2665	ex. nicht	9999*	0*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
10	0.3173	ex. nicht	9999*	0*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)

(\*) Da  $\mu_\alpha$  nicht existiert, wird die Simulation hier mit  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_0) = 210$  durchgeführt.

**Tabelle 3b:** Zweiseitiger Prüfplan (6) mit  $n = 22$ ,  $c = 8.841$ ,  $s_{\text{crit}} = 4.7$ 

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\sigma$	$p^*$	$\mu_\alpha$	$s > s_{\text{max}}$	Los ann.	$\mu_\beta$	$s > s_{\text{max}}$	Los ann.
1	0.762 E-23	202.326	0	8963	201.405	0	1020
2	0.573 E-6	204.653	0	8966	202.810	0	1020
3	0.000858	206.980	1	8969	204.215	1	1020
3.5	0.00427	208.192	148	9019	204.918	148	1021
3.6	0.00547	208.470	241	9048	205.059	241	1022
3.7	0.00688	208.787	387	9089	205.200	387	1023
3.8	0.00850	209.194	593	9081	205.341	593	1024
$\sigma_0 = 3.88224$	0.0100	210	788	9119	205.457	788	1024
3.9	0.0103	ex. nicht	843*	9054*	205.482	843	1024
4	0.0124	ex. nicht	1140*	8716*	205.625	1140	1027
4.1	0.0147	ex. nicht	1508*	8300*	205.768	1508	1028
4.5	0.0263	ex. nicht	3388*	6273*	206.360	3388	1068
5	0.0455	ex. nicht	6052*	3592*	207.207	6052	1153
5.5	0.0690	ex. nicht	7988*	1720*	208.456	7988	1204
5.6	0.0741	ex. nicht	8269*	1441*	208.874	8269	1214
5.7	0.0794	ex. nicht	8513*	1226*	209.629	8513	1216
$\sigma_1 = 5.71204$	0.0800	ex. nicht	8538*	1204*	210	8538	1204
5.8	0.0847	ex. nicht	8706*	1053*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
6	0.0956	ex. nicht	9097*	750*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
7	0.1531	ex. nicht	9844*	115*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
8	0.2113	ex. nicht	9973*	22*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
9	0.2665	ex. nicht	9998*	0*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)
10	0.3173	ex. nicht	9999*	0*	ex. nicht	wie (4)	wie (5)

(\*) Da  $\mu_\alpha$  nicht existiert, wird die Simulation hier mit  $\mu^* = \frac{1}{2}(T_u + T_0) = 210$  durchgeführt.

Maple-Arbeitsblatt var\_kont1.mws:

```
> #
# Klassische Variablenkontrolle:
# Quantitatives Qualitätsmerkmal
# mit Normalverteilung mit unbekannter Varianz;
# einseitige Toleranzgrenzen mit nichtzentraler t-Verteilung;
# hier: untere Toleranzgrenze
#
> restart;
> Phi:=z->1/2+(1/2)*erf(z/sqrt(2));
> Phic:=z->(1/2)*erfc(z/sqrt(2));
> phi:=z->exp(-z*z/2)/sqrt(2*Pi);
> Phi(z)+Phic(z);
> simplify(%);
> #
# Nicht-zentrale t-Verteilung
#
> const:=sqrt(2*Pi)/GAMMA(n/2)/2^((n-2)/2);
> # prob_t = Pr{T<t}
prob_t := const*Int(s^(n-1)*Phi(s*t/sqrt(n)-delta)*phi(s),s=0..infinity);
> # probc_t = Pr{T>t}
probc_t:=const*Int(s^(n-1)*Phic(s*t/sqrt(n)-delta)*phi(s),s=0..infinity);
> #prob_t+probc_t;
> #simplify(%);
```

```

> #
> # Variablenprüfung mit unbekannter Varianz
> #
> #
> # OC-Funktion:
> #  $L(p) = \Pr\{t(n-1, \delta) > c\}$ , wobei  $\delta = \sqrt{n} \cdot z_{\text{lminp}}$ 
> #  $L1(\delta) = \text{OC-Funktion als Funktion von } \delta \text{ bei gegebenem } c$ 
> #  $L2(c) = \text{OC-Funktion als Funktion von } c \text{ bei gegebenem } \delta$ 
> #
> unassign('n');
> n1 := n-1;
> const:=sqrt(2*Pi)/GAMMA(n1/2)/2^((n1-2)/2);
> L1 := delta -> const*Int(s^(n1-1)*Phic(s*c/sqrt(n1)-delta)
>         *phi(s),s=0..infinity);
> L2 := c -> const*Int(s^(n1-1)*Phic(s*c/sqrt(n1)-delta)
>         *phi(s),s=0..infinity);
> p_alpha := 0.01;
> p_beta := 0.08;
> # z_lminp_alpha = oberes p_alpha-Quantil von N(0,1)
> z_lminp_alpha := solve(Phic(z)=p_alpha,z);
> # z_lminp_beta = oberes p_beta-Quantil von N(0,1)
> z_lminp_beta := solve(Phic(z)=p_beta,z);
> alpha := 0.9;
> beta := 0.1;
> z_alpha := solve(Phi(x)=alpha,x);
> z_lminbeta := solve(Phic(x)=beta,x);
> # Näherungsformel für n
> n1 := (z_alpha*sqrt(1+0.5*z_lminp_alpha^2)
> +z_lminbeta*sqrt(1+0.5*z_lminp_beta^2))^2/(z_lminp_alpha-z_lminp_beta)^2;
> # Im Spezialfall alpha = 1-beta:
> n2 := z_alpha^2*(4+z_lminp_alpha^2+z_lminp_beta^2)
>       /(z_lminp_alpha-z_lminp_beta)^2;
> # Formel von Strimmer im Spezialfall
> n3 := 4*z_alpha^2*(1+(z_lminp_alpha+z_lminp_beta)^2/8)
>       /(z_lminp_alpha-z_lminp_beta)^2;
> # Startwert für n wählen:
> n:=22;
> n1 := n-1;
> delta_alpha := z_lminp_alpha*sqrt(n);
> delta_beta := z_lminp_beta*sqrt(n);
> # Ziel: c so wählen, dass  $L(p_\alpha) = \alpha$ 
> # d.h.  $L2(c) = \alpha$ , wobei  $\delta = \delta_{\text{alpha}}$ 
> delta := delta_alpha;
> evalf(L2(8));
> unassign('c');
> c:=fsolve(L2(c)=alpha,c=8..9);
> # Berechnung von  $L(p_\alpha)$ 
> evalf(L2(c));
> # Berechnung von  $L(p_\beta)$ 
> delta := delta_beta;
> evalf(L2(c));
> # Symmetrische Lösung mit  $L(p_\beta) = 1-L(p_\alpha)$ 
> c := 8.84;
> evalf(L1(delta_alpha));
> 1-%;
> evalf(L1(delta_beta));
> unassign('c');
> c := fsolve(1-L1(delta_alpha)=L1(delta_beta),c=8.84..8.85);
> # Berechnung von  $L(p_\alpha)$ 
> evalf(L1(delta_alpha));
> # Berechnung von  $1-L(p_\alpha)$ 
> 1-%;
> # Berechnung von  $L(p_\beta)$ 
> evalf(L1(delta_beta));
>

```

## 8. Variablenkontrolle, verteilungsfreies Verfahren

In den Kapiteln 6 und 7 haben wir uns mit der Variablenkontrolle für Qualitätsmerkmale befasst, welche normalverteilt sind mit bekannter oder unbekannter Standardabweichung. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Variablenkontrolle ohne eine spezielle Verteilungsannahme (verteilungsfrei).

### 1. Einseitiger Fall

$X$  = Qualitätsmerkmal mit beliebiger, unbekannter Verteilungsfunktion  $F$ ;

$T_u$  untere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p_u = p(T_u, F) = P_F \{X < T_u\}$ .

Typischer Prüfplan:

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je mit Verteilungsfunktion  $F$ ;

$N_u = \#\{i | X_i < T_u\}$  = Anzahl der defekten Stücke ;

$N_u \sim Bi(n, p_u)$ ;

Los annehmen, falls  $N_u \leq c$  ( $c$  = Annahmegrenze) .

Dieser Prüfplan ist äquivalent zu einem einfachen Prüfplan  $(n, c)$  für ein qualitatives Qualitätsmerkmal (vgl. Kapitel 2, einfacher Prüfplan mit Zurücklegen). In der randomisierten Form  $(n, c, \delta)$  lautet die Entscheidungsregel:

falls  $N_u < c$ : Los annehmen

falls  $N_u = c$ :  $\begin{cases} \text{Los annehmen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta \\ \text{Los ablehnen mit Wahrscheinlichkeit } \delta \end{cases}$

falls  $N_u > c$ : Los ablehnen.

Die OC-Funktion zu diesem Prüfplan lautet

$$L(p_u) = P\{N_u < c\} + (1 - \delta)P\{N_u = c\}.$$

Da die Verteilung der Zufallsvariablen  $N_u$  nur vom Parameter  $p_u$  abhängt, ist die OC-Funktion

$L(p_u)$  ist nur abhängig vom Ausschussanteil  $p_u$ ; sie ist unabhängig von der Toleranzgrenze  $T_u$  und der unbekanntem Verteilungsfunktion  $F$ .

*Aufgabe:*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht:

A) Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta.$$

B) Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) \geq \alpha, \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{und} \quad 1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta).$$

Im Fall B wird die symmetrische Lösung mit Produzentenrisiko = Konsumentenrisiko gesucht. Beide Aufgaben A und B können gelöst werden mit Hilfe des Arbeitsblattes `ein_ppbi.mws` (vgl. Kapitel 2).

Beispiel:

$$p_\alpha = 0.01 \quad \alpha = 0.9$$

$$p_\beta = 0.08 \quad \beta = 0.1$$

Dann gilt:

im Fall A:  $n = 47$ ,  $c = 1$ ,  $\delta = 0.066\,018$ , und damit  $L(p_\alpha) = 0.900\,000$ ,  $L(p_\beta) = 0.095\,679$ ;

im Fall B:  $n = 47$ ,  $c = 1$ ,  $\delta = 0.054\,563$ , und damit  $L(p_\alpha) = 0.903\,391$ ,  $L(p_\beta) = 0.096\,609$ .

Bei normalverteiltem Qualitätsmerkmal betragen die minimalen Stichprobenumfänge zur Lösung der Aufgaben A und B

bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$ :  $n = 8$  (unabhängig von  $\sigma$ );

bei unbekannter Standardabweichung  $\sigma$ :  $n = 22$  (unabhängig von  $\sigma$ )

(vgl. Kapitel 6 und 7). Der Preis für die verteilungsfreie Variante schlägt sich nieder im vergrößerten Stichprobenumfang (47 anstelle von 22 bzw. 8). Für diesen Preis erhalten wir erhöhte Sicherheit (verteilungsfrei anstelle von Normalverteilungsannahme) und ein einfacheres Prüfverfahren ( $N_u$  anstelle von  $\bar{X}$  und  $S$ ).

Bei einer einseitigen oberen Toleranzgrenze  $T_o$  ist

$$p_o = p(T_o, F) = P_F \{X > T_o\} = \text{Ausschussanteil};$$

$$N_o = \#\{i | X_i > T_o\} = \text{Anzahl der defekten Stücke};$$

$$N_o \sim Bi(n, p_o).$$

Wir erhalten die gleichen Lösungen zu unseren Aufgaben A und B wie bei einer einseitigen unteren Toleranzgrenze, da ja die OC-Funktion nur vom Ausschussanteil abhängt und unabhängig ist von der Toleranzgrenze.

## 2. Zweiseitiger Fall

$X$  = Qualitätsmerkmal mit beliebiger, unbekannter Verteilungsfunktion  $F$ ;

$T_u, T_o$  untere und obere Toleranzgrenze.

Ausschussanteil  $p = p(T_u, T_o, F) = p_u + p_o = P_F \{X < T_u\} + P_F \{X > T_o\}$ .

Typischer Prüfplan:

$n$  Stücke zufällig auswählen und jeweils Qualitätsmerkmal messen;

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je mit Verteilungsfunktion  $F$ ;

$N_u = \#\{i | X_i < T_u\} = \text{Anzahl der defekten Stücke, welche untere Toleranzgrenze verletzen};$

$N_o = \#\{i | X_i > T_o\} = \text{Anzahl der defekten Stücke, welche obere Toleranzgrenze verletzen};$

$N = N_u + N_o \sim Bi(n, p)$ , wobei  $p = p_u + p_o$ ;

Los annehmen, falls  $N \leq c$  ( $c = \text{Annahmegrenze}$ ).

Dieser Prüfplan ist wiederum äquivalent zu einem einfachen Prüfplan  $(n, c)$  für ein qualitatives Qualitätsmerkmal (vgl. Kapitel 2, einfacher Prüfplan mit Zurücklegen). In der randomisierten Form  $(n, c, \delta)$  lautet die Entscheidungsregel:

falls  $N < c$ : Los annehmen

falls  $N = c$ :  $\begin{cases} \text{Los annehmen mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \delta \\ \text{Los ablehnen mit Wahrscheinlichkeit } \delta \end{cases}$

falls  $N > c$ : Los ablehnen.

Die OC-Funktion zu diesem Prüfplan lautet

$$L(p) = P\{N < c\} + (1 - \delta)P\{N = c\}.$$

Die OC-Funktion  $L(p)$  ist nur abhängig vom Ausschussanteil  $p = p_u + p_o$ ; sie ist unabhängig von den Toleranzgrenzen  $T_u, T_o$  und der unbekanntem Verteilungsfunktion  $F$ .

*Aufgabe:*

Gegeben:  $p_\alpha, \alpha$  und  $p_\beta, \beta$

Gesucht:

A) Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) = \alpha \quad \text{und} \quad L(p_\beta) \leq \beta.$$

B) Prüfplan  $(n, c, \delta)$  mit minimalem Stichprobenumfang  $n$  und mit

$$L(p_\alpha) \geq \alpha, \quad L(p_\beta) \leq \beta \quad \text{und} \quad 1 - L(p_\alpha) = L(p_\beta).$$

Im Fall B wird die symmetrische Lösung mit Produzentenrisiko = Konsumentenrisiko gesucht. Beide Aufgaben A und B können gelöst werden mit Hilfe des Arbeitsblattes `ein_ppbi.mws` (vgl. Kapitel 2). Die Lösungen sind identisch zu den einseitigen Lösungen im vorangehenden Abschnitt.

## 9. Qualitätsregelkarten

*Bisher:*

Abnahme- und Eingangsprüfung;  
 erfüllt ein Los mit  $N$  Einheiten die vereinbarten Qualitätsanforderungen?  
*Attributenkontrolle:* qualitatives Merkmal, zählende Prüfung;  
*Variablenkontrolle:* quantitatives Merkmal, messende Prüfung;  
 Prüfpläne mit erwünschter OC-Kurve (meist zwei Punkte vorgegeben).

*Jetzt:*

Laufende Kontrolle bei der Produktion;  
 werden Sollwerte eingehalten (z.B. Kolbendurchmesser)?  
 Produktion von Ausschuss möglichst vermeiden;  
*Attributenkontrolle:* qualitatives Merkmal;  
*Variablenkontrolle:* quantitatives Merkmal;  
 breites Spektrum von statistischen Testverfahren zum Einstichproben-Problem.

*Qualitätsregelkarten, früher: Kontrollkarten* (engl.: *control cards*, control = steuern, regeln):  
 dienen der Überwachung der laufenden Produktion;  
 sollen frühzeitig Alarm schlagen, wenn die Sollwerte nicht mehr eingehalten werden,  
 d.h. wenn der Produktionsprozess ausser Kontrolle (out of control) ist.

### 1. Hilfssätze

a)  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsgrößen je mit  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \text{arithmetisches Mittel};$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \text{empirische Varianz};$$

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{und} \quad E(S^2) = \sigma^2;$$

$$E(S) = \gamma_n \sigma \quad \text{mit} \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (\text{vgl. Tabelle 1});$$

$$E(S/\gamma_n) = \sigma, \text{ d.h. } S/\gamma_n \text{ ist ein erwartungstreuer Schätzer für } \sigma \text{ (} 1/\gamma_n = \text{unbiasing constant).}$$

**Tabelle 1**

$n$	$\gamma_n$
2	1.252
3	1.128
4	1.085
5	1.064
$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1

b)  $Z_1, \dots, Z_n$  unabhängige Zufallsgrößen je mit  $N(0,1)$ ;

$$\bar{Z} = \frac{1}{n}(Z_1 + \dots + Z_n) = \text{arithmetisches Mittel};$$

$$\tilde{Z} = Ze(Z_1, \dots, Z_n) = \text{Zentralwert};$$

$$\text{Var}(\bar{Z}) = \frac{1}{n}, \quad \text{Var}(\tilde{Z}) = \frac{c_n}{n} \quad \text{und} \quad \frac{\text{Var}(\tilde{Z})}{\text{Var}(\bar{Z})} = c_n;$$

$c_n$  ist eine Maßzahl für die relative Effizienz der beiden Schätzer  $\bar{Z}$  und  $\tilde{Z}$ ; für  $n \rightarrow \infty$  gilt:  $c_n \rightarrow \pi/2 = 1.571$ ;

die Werte  $c_n$  (vgl. Tabelle 2) können mit Maple berechnet werden (vgl. Anhang A4).

**Tabelle 2**

$n$	$c_n$
1	1
3	1.346
5	1.434
7	1.473
$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1.571

- c)  $Z_1, \dots, Z_n$  unabhängige Zufallsgrößen je mit  $N(0,1)$  ;  
 $Z_{(n)} = \max(Z_1, \dots, Z_n)$ ,  $Z_{(1)} = \min(Z_1, \dots, Z_n)$  ;  
 $R = Z_{(n)} - Z_{(1)} =$  Spannweite (range);  
 $E(Z_{(n)}) = a_n$  (Normalwert, normal score);  
 $E(Z_{(1)}) = -a_n$  ;  
 $E(R) = 2a_n$  ;  
 die Werte  $a_n$  (vgl. Tabelle 3) können mit Maple berechnet werden (vgl. Anhang A5).

**Tabelle 3**

$n$	$a_n$
1	0
2	0.5642
3	0.8463
4	1.0294
5	1.1630
6	1.2672
10	1.5388
100	2.5076
⋮	⋮

**2. Bestimmung der Sollwerte**

Laufende Produktion eines Werkstücks (z.B. Kolben für einen Automotor);

$X =$  Qualitätsmerkmal (z.B. Kolbendurchmesser);

Annahme:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ;

Produktionsprozess ist *unter Kontrolle*, falls in jedem Produktionsschritt nur unvermeidbare, zufällige Schwankungen auftreten.

*Ziel:*

Schätzung der Parameter  $\mu, \sigma$  bei einem Produktionsprozess, der unter Kontrolle ist;

diese Schätzungen dienen dann als Sollwerte bei der weiteren Überwachung des Produktionsprozesses mit Qualitätsregelkarten.

Wir nehmen jetzt an, dass wir einen stabilen *Vorlauf* haben, bei dem der Prozess unter Kontrolle ist, und wir wollen die Parameter  $\mu, \sigma$  (Sollwerte) schätzen.

*Bestimmung der Sollwerte im Vorlauf:*

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X$  ist das Qualitätsmerkmal;

wir wählen aus der laufenden Produktion  $k$  Stichproben je mit Umfang  $m$ :

$x_{ij} =$  Beobachtung (Messwert) Nr.  $j$  in Stichprobe  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, m$  ;

$X_{ij} =$  zugehörige Zufallsgrößen;

übliche Werte:  $m = 4, 5$ ,  $k = 20, 25$  ;

**Tabelle 4**

St.pr.Nr.	Messwerte	$\bar{x}_i$	$s_i$	$\tilde{x}_i$	$r_i$
1	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}$	$\bar{x}_1$	$s_1$	$\tilde{x}_1$	$r_1$
2	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$	$\bar{x}_2$	$s_2$	$\tilde{x}_2$	$r_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$k$	$x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}$	$\bar{x}_k$	$s_k$	$\tilde{x}_k$	$r_k$

Dabei ist

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m}(x_{i1} + \dots + x_{im}) = \text{arithmetisches Mittel in Stichprobe } i;$$

$$s_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \text{(empirische) Varianz in Stichprobe } i;$$

$s_i = \sqrt{s_i^2}$  = (empirische) Standardabweichung in Stichprobe  $i$ ;

$\tilde{x}_i = Ze(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$  = Zentralwert in Stichprobe  $i$ ;

$r_i = \max(x_{i1}, \dots, x_{im}) - \min(x_{i1}, \dots, x_{im})$  = Spannweite (range) in Stichprobe  $i$ .

Es gilt:

$$E(\bar{X}_i) = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{\sigma^2}{m};$$

$$E(\tilde{X}_i) = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(\tilde{X}_i) = c_m \frac{\sigma^2}{m};$$

$$E(S_i) = \gamma_m \sigma \quad \text{und} \quad E(R_i) = 2a_m \sigma;$$

somit sind  $\bar{X}_i$  und  $\tilde{X}_i$  erwartungstreue Schätzer für  $\mu$ , und  $S_i/\gamma_m$  und  $R_i/(2a_m)$  sind erwartungstreue Schätzer für  $\sigma$ . Wenn nun alle  $k$  Stichproben berücksichtigt werden, so erhält man die folgenden erwartungstreuen Schätzer für die Sollwerte  $\mu$  und  $\sigma$ :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{k}(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k) = \frac{1}{km} \sum_{i,j} x_{ij} = \text{Gesamtmittel};$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{k}(\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_k) \quad \text{arithmetisches Mittel der Zentralwerte};$$

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{k\gamma_m}(s_1 + \dots + s_k) \quad \text{arithmetisches Mittel der Standardabweichungen mit Korrekturfaktor } 1/\gamma_m \text{ (unbiasing constant)};$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{2ka_m}(r_1 + \dots + r_k) \quad \text{arithmetisches Mittel der Spannweiten mit Korrekturfaktor } 1/(2a_m) \text{ (unbiasing constant)};$$

$$\hat{\sigma}_3 = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i^2} \quad \text{pooled standard deviation; erwartungstreu, da } \gamma_n \approx 1 \text{ für } n = k(m-1);$$

die Genauigkeit dieser Schätzungen kann durch Verlängerung des Vorlaufes gesteuert werden (Anzahl  $k$  der Stichproben vergrößern), daher ist die Effizienz der Schätzfunktionen kein entscheidender Gesichtspunkt bei der Auswahl der Schätzfunktionen.

Klassische Schätzmethode:  $\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1$ ;

einfachere Alternative:  $\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2$  (erfordert weniger Rechenarbeit).

### 3. Qualitätsregelkarten bei Variablenprüfung

a)  $\bar{x}$ -Karte (*Xbar chart*): Überwachung des Mittelwerts

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  Qualitätsmerkmal;

$m$  = Umfang der Teilstichproben;

$\bar{x}_i$  = arithmetisches Mittel in Teilstichprobe  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ );

$\bar{X}_i$  = zugehörige Zufallsgröße;

OEG = obere Eingriffsgrenze (UCL = upper control limit)

UEG = untere Eingriffsgrenze (LCL = lower control limit)

1. Schritt: Ermittlung der Sollwerte  $\mu, \sigma$  im Vorlauf;
2. Schritt: Berechnung der Eingriffsgrenzen nach  $3\sigma$ -Regel:

$$\bar{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2/m);$$

$$OEG = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \quad UEG = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{m}}.$$

Es gilt (gemäß Tabelle 5):

$$P\{\bar{X}_i > OEG\} = P\{\bar{X}_i < UEG\} = 0.00135.$$

Für  $k = 25$  gilt

$$P\{\max(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k) > OEG\} = P\{\min(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k) < UEG\} \\ = 1 - 0.99865^{25} = 1 - 0.9668 = 0.0332.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlalarm bei einer Karte mit  $k = 25$  Stichproben beträgt also 0.0332. Anstelle der verbreiteten  $3\sigma$ -Regel können die Eingriffsgrenzen auch anders definiert werden (vgl. Minitab).

**Tabelle 5:**  $Z \sim N(0,1)$

$c$	$P\{Z > c\}$	$P\{ Z  > c\}$
1	0.1587	0.3173
2	0.0228	0.0455
3	0.00135	0.0027

- b) *s*-Karte (S chart): Überwachung der Streuung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  Qualitätsmerkmal;

$m =$  Umfang der Teilstichproben;

$\bar{x}_i =$  arithmetisches Mittel in Teilstichprobe  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ );

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} = \text{Standardabweichung in Stichprobe } i;$$

$S_i =$  zugehörige Zufallsgröße;

1. Schritt: Ermittlung der Sollwerte  $\mu, \sigma$  im Vorlauf;
2. Schritt: Berechnung der Grundlinie und der Eingriffsgrenzen:

$$\text{Grundlinie} = E(S_i) = \gamma_m \sigma$$

oder Grundlinie =  $med(S_i) = s_0$ ; dabei ist  $s_0 = med(S_i)$  so definiert, dass  $P\{S_i > s_0\} = P\{S_i < s_0\} = \frac{1}{2}$ . Es gilt dann  $s_0 = \delta_m \sigma$

mit  $\delta_m = \sqrt{\chi_{0.5}^2(m-1)/(m-1)}$  (vgl. Tabelle 6). Wenn die

Grundlinie als  $med(S_i)$  definiert wird, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stichprobenpunkt oberhalb bzw. unterhalb der Grundlinie liegt, genau 50% (vgl. Schnelltest auf Symmetrie bei Minitab).

Eingriffsgrenzen  $OEG$  und  $UEG$  so, dass  $P\{S_i > OEG\} = P\{S_i < UEG\} = \alpha$ ,

wobei  $\frac{(m-1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$ ;

$$\Rightarrow OEG = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha}^2(m-1)}{m-1}}, \quad UEG = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{\alpha}^2(m-1)}{m-1}}.$$

Eine sinnvolle Wahl von  $\alpha$  ist  $\alpha = 0.00135$ ; diese Wahl entspricht der  $3\sigma$ -Regel bei der  $\bar{x}$ -Karte; die obigen Eingriffsgrenzen berücksichtigen jedoch die Asymmetrie der Verteilung von  $S_i$ . Die direkte Anwendung der  $3\sigma$ -Regel kann zu negativen unteren Eingriffsgrenzen führen, welche dann durch Null ersetzt werden und somit wirkungslos sind (vgl. *s*-Karte bei Minitab).

**Tabelle 6:**

$m$	$\gamma_m$	$\delta_m$
2	1.252	0.6745
3	1.128	0.8326
4	1.085	0.8881
5	1.064	0.9161
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1	1

c) *R-Karte* (R chart): Überwachung der Streuung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  Qualitätsmerkmal;

$m$  = Umfang der Teilstichproben;

$r_i$  = Spannweite der Stichprobe  $i$

$R_i$  = zugehörige Zufallsgröße;

1. Schritt: Ermittlung der Sollwerte  $\mu, \sigma$  im Vorlauf;

2. Schritt: Berechnung der Grundlinie und der Eingriffsgrenzen:

Grundlinie:  $E(R_i) = 2a_m \sigma$  oder  $med(R_i)$ ; analoge Bemerkungen wie bei s-Karte;

*OEG* und *UEG* so, dass  $P\{R_i > OEG\} = P\{R_i < UEG\} = \alpha$ ;

eine sinnvolle Wahl von  $\alpha$  ist  $\alpha = 0.00135$ ; die exakte Verteilung von  $R_i/\sigma$  kann berechnet werden mit Maple (vgl. Anhang A6, Maple-Arbeitsblatt `kont_kar.mws`).

d) *Einzelwertkarte* (I-MR chart, individuals-moving range chart):

Überwachung von Mittelwert und Streuung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  Qualitätsmerkmal;

$x_1, \dots, x_k$  Einzelwerte (Stichprobenumfang  $m = 1$ )

1. Schritt: Ermittlung der Sollwerte  $\mu, \sigma$  im Vorlauf;

2. Schritt:

Einzelwertkarte für Mittelwertsüberwachung:

Grundlinie:  $E(X_i) = \mu$ ;

*OEG* und *UEG* so, dass  $P\{X_i > OEG\} = P\{X_i < UEG\} = 0.00135$  ( $3\sigma$ -Regel).

Einzelwertkarte für Streuungsüberwachung:

$R_i = X_i - X_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$ ; gleitende Spannweiten (moving range);

$E(R_i) = 2a_2\sigma$ , *OEG* und *UEG* wie bei R-Karte.

#### 4. Kontinuierliche Stichprobenpläne (continuous sampling plans, CSP)

Wir befassen uns hier mit einem Prüfverfahren von Dodge (1943), das sowohl bei der Abnahmekontrolle, als auch bei der laufenden Produktionsüberwachung eingesetzt werden kann. Das Verfahren  $CSP(i, k)$  kann wie folgt charakterisiert werden:

- Gut/Schlecht-Prüfung;
- laufende Produktion (bzw. Lieferung) von Stücken;
- jedes aufgefundene schlechte Stück wird durch ein gutes ersetzt;
- das Prüfverfahren  $CSP(i, k)$  ist festgelegt durch zwei Zahlen  $i, k$  (z.B.  $i = 50, k = 20$ ); vgl. das nebenstehende Ablaufdiagramm.

Es sei

$p$  = unbekannter Ausschussanteil in laufender Produktion

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{falls j-tes geprüftes Stück defekt} \\ 0 & \text{falls j-tes geprüftes Stück i.O.} \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 1 & \text{falls j-tes geprüftes Stück aus Totalkontrolle stammt} \\ k & \text{falls j-tes geprüftes Stück aus Stichprobenkontrolle stammt} \end{cases}$$

$m$  = Anzahl geprüfter Stücke (zu einem gegebenen Zeitpunkt);

$n$  = zugehörige Anzahl abgefertigter Stücke.

Dann gilt:

$$n = Z_1 + \dots + Z_m \quad (n \text{ ist Zufallsgröße!});$$

$$\frac{m}{n} = \text{Anteil der geprüften Stücke};$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = AFI(p);$$

AFI = average fraction inspected, durchschnittlicher Anteil der geprüften Stücke an der Gesamtzahl der abgefertigten Stücke (im stationären Zustand);

$n - m$  = Anzahl der ungeprüften Stücke;

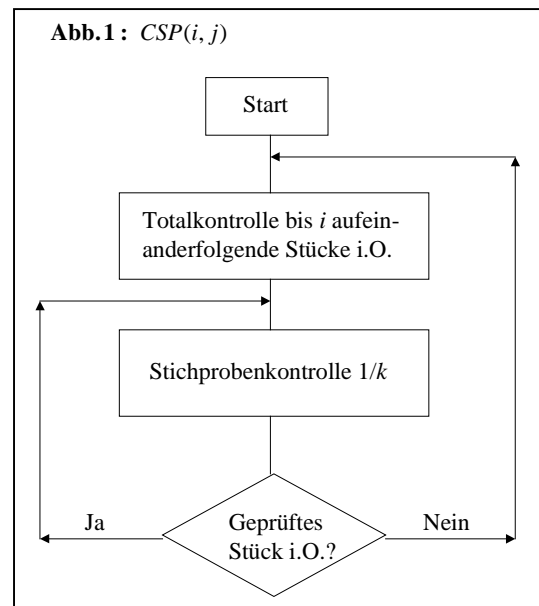
$(n - m)p$  = Erwartungswert der Anzahl der defekten Stücke unter den ersten  $n$  abgefertigten Stücke (geprüfte Stücke alle i.O. nach Prüfung);

$$\frac{(n - m)p}{n} = \left(1 - \frac{m}{n}\right)p = \text{erwarteter Anteil der defekten St. unter den ersten } n \text{ abgefertigten St.};$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)p = (1 - AFI(p))p = AOQ(p);$$

AOQ = average outgoing quality, erwarteter Anteil der defekten Stücke nach der Prüfung (im stationären Zustand); durchschnittlicher ausgelieferter Ausschussanteil; mittlerer Durchschlupf;

$AOQL = \max_{0 \leq p \leq 1} AOQ(p)$  = average outgoing quality limit, Höchstwert des mittleren Durchschlupfs.



Für den Prüfplan  $CSP(i, k)$  gilt:

$$\text{a) } AFI(p) = \frac{1}{1 + (k-1)(1-p)^i}$$

$$\text{b) } AOQ(p) = \frac{(k-1)p(1-p)^i}{1 + (k-1)(1-p)^i}$$

$$\text{c) } AOQ(0) = AOQ(1) = 0;$$

die Funktion  $AOQ(p)$  hat im Intervall  $[0,1]$  genau ein Maximum, und zwar an der Stelle  $p^*$  mit  $(1+i)p^* - 1 = (k-1)(1-p^*)^{i+1}$ .

Die Funktionen können berechnet und gezeichnet werden mit Maple (vgl. Maple-Arbeitsblatt `csp.mws`).

## Anhang

### A1. Gleichung von Wald

Es seien  $Z_1, Z_2, \dots$  unabhängige Zufallsgrößen je mit der gleichen Verteilung und mit  $E(|X_i|) < \infty$ . Weiter sei  $N$  eine zugehörige Stoppregel mit  $E(N) < \infty$ , d.h.  $N$  ist eine Zufallsgröße mit Werten  $1, 2, \dots$ , wobei das Ereignis  $\{N = n\}$  nur abhängig ist von  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  und unabhängig von  $Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots$ . Dann gilt:

$$E(Z_1 + \dots + Z_N) = E(N)E(Z_1) \quad (\text{Gleichung von Wald}).$$

*Beweis* (nach Lehmann, 1959, S.119):

Es gilt

$$\begin{aligned} E(Z_1 + \dots + Z_N) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N = n\} E\{Z_1 + \dots + Z_n | N = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N = n\} \sum_{i=1}^n E\{Z_i | N = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P\{N = n\} E\{Z_i | N = n\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} P\{N = n\} E\{Z_i | N = n\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\} E\{Z_i | N \geq i\}. \end{aligned}$$

Da  $N$  eine Stoppregel ist, so ist das Ereignis  $\{N < i\}$  stochastisch unabhängig von  $Z_i$ , und damit ist auch das komplementäre Ereignis  $\{N < i\}^c = \{N \geq i\}$  stochastisch unabhängig von  $Z_i$ ! Somit ist  $E(Z_i | N \geq i) = E(Z_i) = E(Z_1)$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} E(Z_1 + \dots + Z_N) &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\} \underbrace{E\{Z_i | N \geq i\}}_{= E(Z_1)} = E(Z_1) \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\} \\ &= E(Z_1) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} P\{N = n\} = E(Z_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P\{N = n\} \\ &= E(Z_1) \sum_{n=1}^{\infty} n P\{N = n\} = E(Z_1) E(N), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

## A2. Nichtzentrale t-Verteilung

$X$  und  $Z$  seien unabhängige Zufallsgrößen, wobei  $Z \sim N(0,1)$  und  $X \sim \chi^2(n)$ , d.h.  $Z$  besitzt eine standardisierte Normalverteilung und  $X$  eine Chi-Quadrat-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden. Dann besitzt die Zufallsgröße

$$(1) \quad T \sim \frac{Z + \delta}{\sqrt{X/n}}$$

eine nichtzentrale t-Verteilung mit den Parametern  $(n, \delta)$ ;  $n$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade und  $\delta$  ist der sogenannte Nichtzentralitätsparameter. Wir wollen die Verteilungsfunktion von  $T$  bestimmen.

Es gilt

$$F(t) = P\{T < t\} = P\{Z + \delta < t\sqrt{X/n}\}.$$

Nun sei  $Y = \sqrt{X/n}$  und  $g$  die Dichte von  $Y$ . Dann können wir schreiben

$$(2) \quad F(t) = P\{T < t\} = P\{Z + \delta < tY/\sqrt{n}\} = P\left\{Z < \frac{t}{\sqrt{n}}Y - \delta\right\} = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}y - \delta\right) g(y) dy.$$

Nun bleibt noch die Bestimmung der Dichte  $g(y)$ . Es gilt

$$X \sim \chi^2(n) \Rightarrow U = \frac{1}{2}X \sim Ga(a) \text{ mit } a = \frac{1}{2}n.$$

Die Dichte der Gamma-Verteilung  $Ga(a)$  ist gegeben als

$$f_U(u) = \frac{1}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-u}, \quad u > 0.$$

Es ist  $Y = \sqrt{2U}$  und somit gilt

$$\begin{aligned} G(y) &= P\{Y < y\} = P\{\sqrt{2U} < y\} = P\left\{U < \frac{1}{2}y^2\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}y^2} f_U(u) du; \\ g(y) &= y f_U\left(\frac{1}{2}y^2\right) = y \frac{1}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2}y^2\right)^{a-1} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} y^{n-1} e^{-\frac{1}{2}y^2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} y^{n-1} \varphi(y). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus (2)

$$F(t) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}y - \delta\right) g(y) dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}y - \delta\right) y^{n-1} \varphi(y) dy,$$

$$F^c(t) = 1 - F(t) = \int_0^{\infty} \Phi^c\left(\frac{t}{\sqrt{n}}y - \delta\right) g(y) dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \int_0^{\infty} \Phi^c\left(\frac{t}{\sqrt{n}}y - \delta\right) y^{n-1} \varphi(y) dy,$$

was zu beweisen war.

**A3. Variablenkontrolle mit unbekannter Varianz, Näherungsformel für n**

$X_1, \dots, X_n$  unabhängig, je  $N(\mu, \sigma^2)$ ;

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right);$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{erwartungstreue Schätzfunktion für unbekannte Varianz } \sigma^2);$$

Los annehmen, falls  $\frac{\bar{X} - T_u}{S} \sqrt{n} \geq c$  ( $c = \text{Annahmegrenze}$ ).

OC-Funktion als Funktion von  $p$ :

Es gilt

$$L(p) = P\{t(n-1, \delta) \geq c\} \quad \text{mit } \delta = z_{1-p} \sqrt{n}.$$

Wir wollen  $(n, c)$  so wählen, dass  $L(p_\alpha) = \alpha$  und  $L(p_\beta) = \beta$  ist.

1°  $Z$  und  $X$  seien zwei unabhängige Zufallsgrößen und zwar  $Z \sim N(0,1)$  und  $X \sim \chi^2(n)$ . Dann besitzt die Zufallsgröße

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{X/n}}$$

eine nichtzentrale t-Verteilung  $t(n, \delta)$ . Da  $E(X) = n$  und  $\text{Var}(X) = 2n$ , so ist die standardisierte Zufallsgröße

$$Z_1 = \frac{X - n}{\sqrt{2n}}$$

näherungsweise standardisiert normalverteilt für großes  $n$ . Nun ist

$$\frac{X}{n} = 1 + Z_1 \sqrt{2/n}, \quad \sqrt{X/n} \approx 1 + Z_1/\sqrt{2n}, \quad \frac{1}{\sqrt{X/n}} \approx 1 - Z_1/\sqrt{2n},$$

und somit finden wir

$$T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{X/n}} \approx (Z + \delta) \left(1 - Z_1/\sqrt{2n}\right) \approx \delta + Z - Z_1 \frac{\delta}{\sqrt{2n}}.$$

Dabei ist

$$\delta = z_{1-p} \sqrt{n} = O(\sqrt{n}) \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\sqrt{2n}} = \frac{z_{1-p}}{\sqrt{2}} = O(1).$$

Nun sind die Zufallsgrößen  $Z$  und  $Z_1$  stochastisch unabhängig, und daher gilt

$$\tilde{Z} = Z - Z_1 \frac{\delta}{\sqrt{2n}} \sim N\left(0, \tau^2\right) \quad \text{mit } \tau^2 = 1 + \frac{\delta^2}{2n} = 1 + \frac{1}{2} z_{1-p}^2.$$

Es gilt also für große Werte von  $n$  die Näherungsformel

$$(3) \quad T = \frac{Z + \delta}{\sqrt{X/n}} \approx \delta + Z - Z_1 \frac{\delta}{\sqrt{2n}} \approx \delta + \tilde{Z} \quad \text{mit } \tilde{Z} \sim N\left(0, \tau^2\right).$$

2° Nun ist

$$L(p) = P\{t(n-1, \delta) \geq c\} \quad \text{mit } \delta = z_{1-p} \sqrt{n},$$

und mit Hilfe unserer Näherungsformel (3) können wir für großes  $n$  schreiben

$$(4) \quad \begin{aligned} L(p) &= P\{t(n-1, \delta) > c\} \approx P\{t(n, \delta) > c\} \approx P\{\delta + \tilde{Z} > c\} = P\{\tilde{Z} > c - \delta\} \\ &= P\left\{N\left(0, \tau^2\right) > c - \delta\right\} = P\left\{N(0,1) > \frac{c - \delta}{\tau}\right\} = P\left\{N(0,1) < \frac{\delta - c}{\tau}\right\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\tau^2 = 1 + \frac{1}{2} z_{1-p}^2 \quad \text{und} \quad \delta = z_{1-p} \sqrt{n}.$$

Die beiden Beziehungen  $L(p_\alpha) \geq \alpha$  und  $L(p_\beta) \leq \beta$  führen zu den Ungleichungen

$$\frac{\delta - c}{\tau} \geq z_\alpha \quad \text{und} \quad \frac{\delta - c}{\tau} \leq z_\beta = -z_{1-\beta},$$

und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta - c &\geq z_\alpha \tau & \text{d.h.} \quad z_{1-p_\alpha} \sqrt{n} - c &\geq z_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\alpha}^2} \\ \delta - c &\leq -z_{1-\beta} \tau & \text{d.h.} \quad z_{1-p_\beta} \sqrt{n} - c &\leq -z_{1-\beta} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\beta}^2}. \end{aligned}$$

Wenn wir die zweite Ungleichungen von der ersten subtrahieren, erhalten wir

$$\sqrt{n} (z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta}) \geq z_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\alpha}^2} + z_{1-\beta} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\beta}^2},$$

d.h.

$$(5) \quad n \geq \frac{1}{(z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta})^2} \left( z_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\alpha}^2} + z_{1-\beta} \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\beta}^2} \right)^2.$$

Im Spezialfall  $\alpha = 1 - \beta$  erhalten wir

$$(6) \quad n \geq \frac{z_\alpha^2}{(z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta})^2} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\alpha}^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\beta}^2} \right)^2.$$

Nun sind die beiden Terme

$$a = \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\alpha}^2} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{1 + \frac{1}{2} z_{1-p_\beta}^2}$$

etwa gleich groß, da  $p_\alpha \approx p_\beta$ , und daher ist  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \approx 0$ , d.h.

$2ab \approx a^2 + b^2$ . Somit gilt

$$(7) \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \approx a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2),$$

und wir erhalten aus (6) die einfachere Näherungsformel

$$n \geq \frac{z_\alpha^2}{(z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta})^2} \left( 4 + z_{1-p_\alpha}^2 + z_{1-p_\beta}^2 \right).$$

Aufgrund von (7) können wir schreiben

$$z_{1-p_\alpha}^2 + z_{1-p_\beta}^2 \approx \frac{1}{2} (z_{1-p_\alpha} + z_{1-p_\beta})^2,$$

und damit erhalten wir die Näherungsformel

$$(8) \quad n \geq \frac{4z_\alpha^2}{(z_{1-p_\alpha} - z_{1-p_\beta})^2} \left( 1 + \frac{1}{8} (z_{1-p_\alpha} + z_{1-p_\beta})^2 \right).$$

#### A4. Varianz des Zentralwerts

$Z_1, \dots, Z_n$  seien unabhängige Zufallsgrößen je mit einer standardisierten Normalverteilung  $N(0,1)$ , und  $Ze$  sei der Zentralwert dieser Zufallsgrößen. Mit  $\Phi$  und  $\varphi$  bezeichnen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von  $Z_1$ , und mit  $F$  und  $f$  die Verteilungs- und Dichtefunktion des Zentralwerts. Für  $x \in \mathbb{R}$  sei

$$N_x = \#\{i | Z_i < x\} = \text{Anzahl der } Z\text{-Beobachtungen, welche } < x \text{ sind.}$$

Die Zufallsgröße  $N_x$  ist binomialverteilt gemäß  $Bi(n, p)$  mit  $p = P\{Z_1 < x\} = \Phi(x)$ . Nun sei  $n$  ungerade mit  $n = 2k + 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{Ze < x\} = P\{\text{mindestens } k+1 \text{ } Z\text{-Beobachtungen sind } < x\} \\ &= P\{N_x \geq k+1\} = \sum_{j=k+1}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad \text{mit } p = \Phi(x). \end{aligned}$$

Die Dichtefunktion zu  $F$  ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$

und da der Erwartungswert des Zentralwerts aus Symmetriegründen Null ist, kann die Varianz berechnet werden nach der Formel

$$\text{Var}(Ze) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Mit Hilfe von Maple kann dieses Integral numerisch berechnet werden für verschiedene Werte von  $k$  (vgl. kont\_kar.mws).

#### A5. Erwartungswert des Maximums

$Z_1, \dots, Z_n$  seien unabhängige Zufallsgrößen je mit einer standardisierten Normalverteilung  $N(0,1)$ , und  $Z_{(n)} = \max(Z_1, \dots, Z_n)$  sei das Maximum dieser Zufallsgrößen. Mit  $\Phi$  und  $\varphi$  bezeichnen wir die Verteilungs- und Dichtefunktion von  $Z_1$ , und mit  $F$  und  $f$  die Verteilungs- und Dichtefunktion des Maximums. Dann gilt

$$F(x) = P\{Z_{(n)} < x\} = P\{\text{alle } Z\text{-Beobachtungen sind } < x\} = [\Phi(x)]^n.$$

Die Dichtefunktion zu  $F$  ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = n[\Phi(x)]^{n-1} \varphi(x),$$

und somit kann der Erwartungswert des Maximums berechnet werden nach der Formel

$$E(Z_{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Mit Hilfe von Maple kann dieses Integral numerisch berechnet werden für verschiedene Werte von  $n$  (vgl. kont\_kar.mws).

## A6. Verteilungsfunktion der Spannweite

Die Herleitungen in diesem Abschnitt beruhen auf Uhlmann (1982), S. 217.

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängige Zufallsgrößen je mit der gleichen Verteilungsfunktion  $F$ , welche eine Dichte  $f$  besitzt. Weiter sei  $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Dann ist die Spannweite definiert als  $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ . Um die Verteilungsfunktion der Spannweite  $R$  herzuleiten, wollen wir zunächst die gemeinsame Verteilung  $G(x, y) = P\{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\}$  von  $X_{(1)}$  und  $X_{(n)}$  bestimmen. Offensichtlich gilt für  $x < y$

$$\{X_{(n)} < y\} = \{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\} \cup \{X_{(1)} > x, X_{(n)} < y\},$$

und da die beiden Ereignisse auf der rechten Seite disjunkt sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned} G(x, y) &= P\{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\} = P\{X_{(n)} < y\} - P\{x < X_{(1)}, X_{(n)} < y\} \\ &= P\{\text{alle } X_i < y\} - P\{\text{alle } X_i \in (x, y)\} = F^n(y) - [F(y) - F(x)]^n \end{aligned}$$

Daraus finden wir die Dichte

$$g(x, y) = n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(x) f(y).$$

Die Verteilungsfunktion der Spannweite  $R$  kann nun für  $r > 0$  geschrieben werden als

$$\begin{aligned} H(r) &= P\{R < r\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{y=x}^{x+r} g(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{y=x}^{x+r} n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(y) f(x) dx \right] dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[ n[F(y) - F(x)]^{n-1} \Big|_{y=x}^{y=x+r} \right] f(x) dx = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(x+r) - F(x)]^{n-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Nun seien  $Z_1, \dots, Z_n$  seien unabhängige Zufallsgrößen je mit einer standardisierten Normalverteilung  $N(0,1)$ , und weiter sei  $Z_{(1)} = \min(Z_1, \dots, Z_n)$ ,  $Z_{(n)} = \max(Z_1, \dots, Z_n)$ . Dann ist die Verteilungsfunktion der Spannweite  $R = Z_{(n)} - Z_{(1)}$  für  $r > 0$  gegeben durch

$$(9) \quad H(r) = P\{R < r\} = n \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(z+r) - \Phi(z)]^{n-1} \varphi(z) dz.$$

Dabei bezeichnen wir mit  $\Phi$  und  $\varphi$  die Verteilungs- und Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung. Die numerische Berechnung des Integrals (9) kann mit Maple durchgeführt werden (vgl. kont\_kar.mws).

## Maple-Arbeitsblatt kont\_kar.mws

```

> #
  # Kontroll-Karten:
  # a) Berechnung von gamma_n; E(S)=gamma_n*sigma
  # b) Berechnung von an = E(max(Z1,...,Zn))
  # c) Ze = Zentralwert von Z1,...,Zn; Berechnung von Var(Zn)
  # d) Verteilungsfunktion der Spannweite R
  #
> restart;
> Phi:=z->1/2+1/2*erf(z/sqrt(2));
> Phic:=z->(1/2)*erfc(z/sqrt(2));
> phi:=z->exp(-z^2/2)/sqrt(2*Pi);
> #
  # Entwicklung zu gamma_n
  #
> gamma_n:=sqrt(2/(n-1))*GAMMA(n/2)/GAMMA((n-1)/2);
> limit(1-gamma_n^2,n=infinity);
> limit(n*(1-gamma_n^2),n=infinity);
> #
  # Normal Scores: an = E(max(Z1,...,Zn))
  #
> n:=100;
> an:=Int(x^n*Phi(x)^(n-1)*phi(x),x=-infinity..infinity);
> evalf(%);
> #
  # Verteilung des Zentralwerts X = Ze(Z1,...,Zn) = Z(k+1) falls n=2k+1;
  #
> # F = Verteilungsfkt von X
> k:=50;
> n:=2*k+1;
> F:=x->sum(binomial(n,j)*Phi(x)^j*Phic(x)^(n-j),j=k+1..n);
> f:=x->diff(F(x),x);
> f(x);
> varianz:=Int(x^2*f(x),x=-infinity..infinity);
> evalf(%);
> n*%;
> evalf(Pi/2);
> #
  # Verteilungsfunktion der Spannweite
  # R = Z(n)-Z(1), wobei Z(1)=min(Z1,...,Zn), Z(n)=max(Z1,...,Zn)
  #
> G := r -> n*int((Phi(x+r)-Phi(x))^(n-1)*phi(x),x=-infinity..infinity);
> n := 5;
> evalf(G(3.9));
> r0 := fsolve(G(r)=0.95,r=3.8..3.9);
> evalf(G(r0));
>

```

## Literatur

- Dodge, Harold F. (1943). A Sampling Inspection Plan for Continuous Production. *Ann.Math.Statistics*, 14, 264-279.
- Dodge, Harold F. and Romig, Harry G. (1944, 1959). *Sampling Inspection Tables*, 1<sup>st</sup> edition 1944, 2<sup>nd</sup> edition 1959. Wiley, New York.
- Lenz, H.-J. and Wilrich, P.-T., Editors (2004). *Frontiers in Statistical Quality Control 7*. Springer, Berlin.
- Maple Version 9 (2003). Maplesoft, Maple Inc., Waterloo, Canada (*www.maplesoft.com*).
- U.S. Government Printing Office (1961,1963). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*. Military Standard MIL-STD-105C, 1961; MIL-STD-105D, 1963, 64 pages. Washington DC.
- U.S. Government Printing Office (1974,1982). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*. Military Standard 1235A, 1974; 1235B, 1982. Washington DC.
- Minitab Release 14 (2003). Minitab Inc., Pennsylvania, USA (*www.minitab.com*).
- Rinne, Horst und Mittag, Hans-Joachim (1995). *Statistische Methoden der Qualitätssicherung*, 3. Auflage, 597 S. Hanser-Verlag, München-Wien.
- Uhlmann, Werner (1966, 1982). *Statistische Qualitätskontrolle*. 1. Auflage 1966, 220 S.; 2. Auflage 1982, 292 S. Teubner, Stuttgart.