Messgeräte:
Mess-System-Analyse und Messmittelfähigkeit

Andreas Berlin

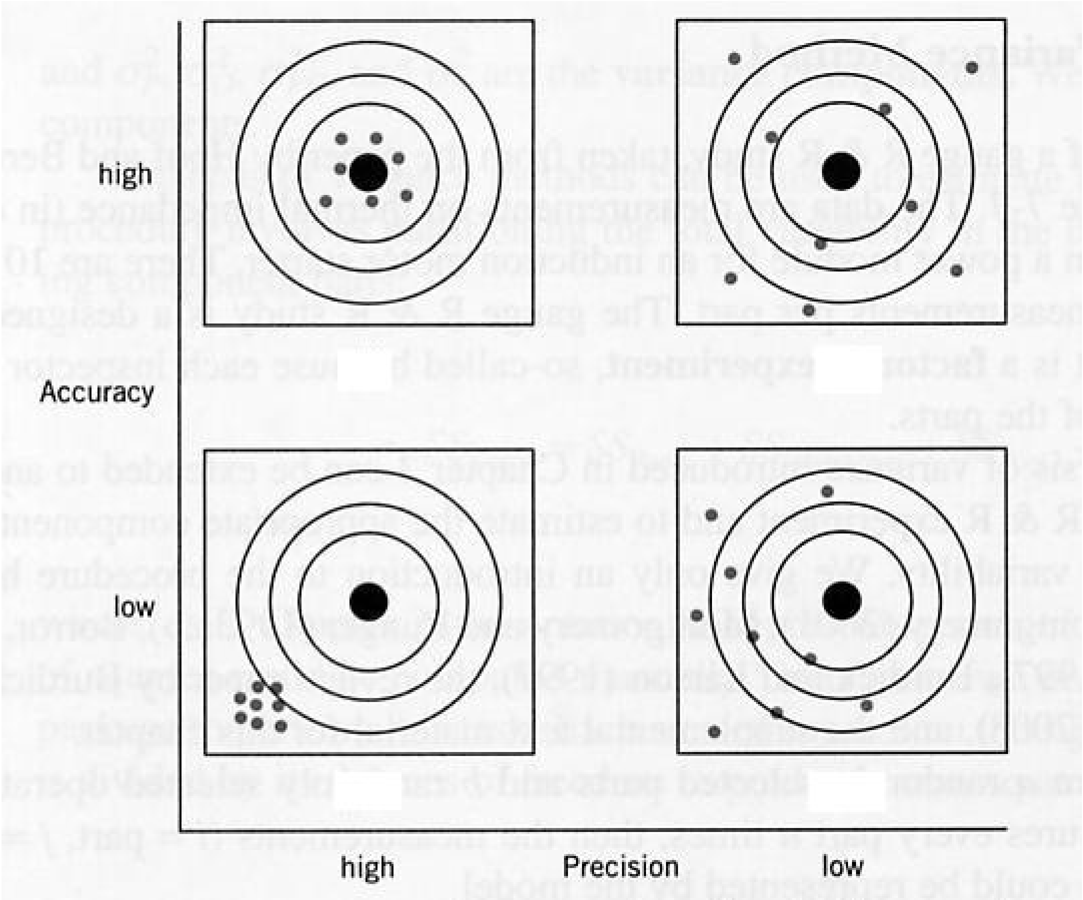
14. Juli 2009
Bachelor-Seminar: Messen und Statistik

Inhalt:

Aspekte einer Messung

- Messgeräte/Messsysteme werden zur Bestimmung von geometrischen und physikalischen Größen benötigt
- Messmittelfähigkeit: Fähigkeit eines Messgerätes, die interessierende Charakteristik eines Objekts korrekt zu messen
- Ideen zur Bestimmung der Messmittelfähigkeit stammen aus der Qualitätssicherung
- Besitzt ein Messsystem eine zu große Varianz, besteht die Gefahr falsche Schlussfolgerungen zu führen

Aspekte einer Messung



- Präzision (Precision) entspricht Reliabilität
- Genauigkeit (Accuracy) entspricht Validität

Aspekte einer Messung

• Genauigkeit:	Besteht ein Unterschied zwischen einer durchschnittlichen Messung und einem Referenzwert?
• Wiederholbarkeit: (Repeatability)	Ist eine Variation der Messergebnisse zu beobachten, wenn derselbe Bediener die gleiche Einheit mit dem gleichen Messsystem wiederholt misst?
• Reproduzierbarkeit: (Reproducibility)	Treten unterschiedliche Messergebnisse auf, wenn unterschiedliche Bediener die gleiche Einheit mit dem gleichen Messsystem messen?
• Stabilität:	Werden Genauigkeit, Wiederholbarkeit und Reproduzierbarkeit über längeren Zeitraum erhalten?

Mess-System-Analyse

Zweck der MSA:

1. Bestimmung wieviel der beobachteten Gesamtvarianz auf das Messsystem zurückzuführen ist
2. Herausstellen der Komponenten der Varianz im Messsystem
3. Bewertung, ob das Messsystem fähig ist, die geplante Messung durchzuführen

Mess-System-Analyse

Der MSA liegt das klassische Messfehler Modell zugrunde (additiver Messfehler):

$$Y = X + \epsilon_g$$

mit Y: gemessener Wert
X: wahrer Wert
ε_g: Messfehler

Annahmen:

$$X \sim N(\mu, \sigma_P^2)$$
$$\epsilon_g \sim N(0, \sigma_g^2)$$
$$X, \epsilon_g \quad unabhängig$$

Mess-System-Analyse

Für die Varianz der gesamten beobachteten Messung y folgt:

$$\sigma^2_{Total} = \sigma^2_P + \sigma^2_g$$

Bei der MSA lässt sich der Messfehler in zwei Komponenten aufteilen:
in Wiederholbarkeit und Reproduzierbarkeit.

$$Y = X + \epsilon_{Wiederholbarkeit} + \epsilon_{Reproduzierbarkeit}$$
$$\sigma^2_g = \sigma^2_{Messfehler} = \sigma^2_{Wiederholbarkeit} + \sigma^2_{Reproduzierbarkeit}$$

ANOVA-Methode

Zweifaktorielles Experiment, bei dem alle **o** zufällig ausgewählten Bediener (Operator) alle **p** zufällig ausgewählten Teile **n** mal gemessen werden.
Die Messwerte können dann durch dieses Modell mit zufälligen Effekten (Varianzkomponenten-Modell) ausgedrückt werden:

$$Y_{ijk} = \mu + P_i + O_j + (PO)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$(i = 1,\dots, p;\quad j = 1,\dots, o;\quad k = 1,\dots, n)$$

- Modellparameter P_i, O_j, $(PO)_{ij}$ und ε_{ijk} voneinander unabhängige Zufallsvariablen

- Effekte der Teile, der Bediener, der Interaktion zwischen Teil und Bediener sowie des zufälligen Fehlers

ANOVA-Methode

Annahmen:

$$P_i \sim N(0, \sigma_P^2)$$
$$O_j \sim N(0, \sigma_O^2)$$
$$PO_{ij} \sim N(0, \sigma_{PO}^2)$$
$$\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

Varianz jedes Messwerts:

$$Var(Y_{ijk}) = \sigma_P^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma^2$$

ANOVA-Methode

$$\sigma^2_{Wiederholbarkeit} = \sigma^2$$

$$\sigma^2_{Reproduzierbarkeit} = \sigma^2_O + \sigma^2_{PO}$$

Varianz des Messgeräts:

$$\sigma^2_g = \sigma^2_{Wiederholbarkeit} + \sigma^2_{Reproduzierbarkeit}$$

$$\sigma^2_g = \sigma^2 + \sigma^2_O + \sigma^2_{PO}$$

ANOVA-Methode

$$SS_{Total} = SS_{Parts} + SS_{Operators} + SS_{P\times O} + SS_{Error}$$

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - y_{...})^2$$

$$SS_{Parts} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{n}(y_{i..} - y_{...})^2$$

$$SS_{Operators} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{n}(y_{.j.} - y_{...})^2$$

$$SS_{P\times O} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{o}\sum_{k=1}^{n}(y_{ij.} - y_{...})^2 - SS_{Parts} - SS_{Operators}$$

$$SS_{Error} = SS_{Total} - SS_{Parts} - SS_{Operators} - SS_{P\times O}$$

$$MS_P = \frac{SS_{Parts}}{p-1}$$

$$MS_O = \frac{SS_{Operators}}{o-1}$$

$$MS_{PO} = \frac{SS_{P\times O}}{(p-1)(o-1)}$$

$$MS_E = \frac{SS_{Error}}{po(n-1)}$$

ANOVA-Methode

Erwartungswerte der MS:

$$E(MS_P) = \sigma^2 + n\sigma^2_{PO} + on\sigma^2_P$$
$$E(MS_O) = \sigma^2 + n\sigma^2_{PO} + pn\sigma^2_O$$
$$E(MS_{PO}) = \sigma^2 + n\sigma^2_{PO}$$
$$E(MS_E) = \sigma^2$$

ANOVA-Methode

Schätzung der Varianzkomponenten:

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}^2_{PO} = \frac{(MS_{PO} - MS_E)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_O = \frac{(MS_O - MS_{PO})}{pn}$$

$$\hat{\sigma}^2_P = \frac{(MS_P - MS_{PO})}{on}$$

ANOVA-Methode

Beispiel

Thermal Impedance Data (°C/W × 100) for the Gauge R & R Experiment

Part Number	Inspector 1			Inspector 2			Inspector 3		
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3
1	37	38	37	41	41	40	41	42	41
2	42	41	43	42	42	42	43	42	43
3	30	31	31	31	31	31	29	30	28
4	42	43	42	43	43	43	42	42	42
5	28	30	29	29	30	29	31	29	29
6	42	42	43	45	45	45	44	46	45
7	25	26	27	28	28	30	29	27	27
8	40	40	40	43	42	42	43	43	41
9	25	25	25	27	29	28	26	26	26
10	35	34	34	35	35	34	35	34	35

ANOVA-Methode

SPSS-Output

Tests der Zwischensubjekteffekte

Abhängige Variable:messwerte

Quelle		Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Sig.
Konstanter Term	Hypothese	115347,600	1	115347,600	253,920	,000
	Fehler	4371,500	9,623	454,267 [a]		
part	Hypothese	3935,956	9	437,328	162,270	,000
	Fehler	48,511	18	2,695 [b]		
operator	Hypothese	39,267	2	19,633	7,285	,005
	Fehler	48,511	18	2,695 [b]		
part * operator	Hypothese	48,511	18	2,695	5,273	,000
	Fehler	30,667	60	,511 [c]		

a. MS(part) + MS(operator) - MS(part * operator)

b. MS(part * operator)

c. MS(Fehler)

ANOVA-Methode

Schätzung der Varianzkomponenten:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{437{,}33 - 2{,}70}{3 \cdot 3} = 48{,}29 \qquad \hat{\sigma}_P^2 = \frac{(MS_P - MS_{PO})}{on}$$

$$\hat{\sigma}_O^2 = \frac{19{,}63 - 2{,}70}{10 \cdot 3} = 0{,}56 \qquad \hat{\sigma}_O^2 = \frac{(MS_O - MS_{PO})}{pn}$$

$$\hat{\sigma}_{PO}^2 = \frac{2{,}70 - 0{,}51}{3} = 0{,}73 \qquad \hat{\sigma}_{PO}^2 = \frac{(MS_{PO} - MS_E)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0{,}51 \qquad \hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}^2_{Wiederholbarkeit} = 0{,}51$$

$$\hat{\sigma}^2_{Reproduzierbarkeit} = 0{,}56 + 0{,}73 = 1{,}29$$

$$\hat{\sigma}_g^2 = 0{,}51 + 0{,}56 + 0{,}73 = 1{,}80$$

Varianz des Messgeräts: 1,80

ANOVA-Methode

Falls σ^2_{PO} nicht signifikant von 0 verschieden ist, kann man auch ein reduziertes Modell der Form

$$y_{ijk} = \mu + P_i + O_j + \epsilon_{ijk}$$

ohne die Interaktion Bediener/Teil verwenden.

Maße für die Messmittelfähigkeit

Anteil der Messsystemvarianz an der Gesamtvarianz:

$$\rho_M = \frac{\sigma_g^2}{\sigma_{Total}^2}$$

Anteil der Varianz der gemessenen Teile an der Gesamtvarianz:

$$\rho_P = \frac{\sigma_P^2}{\sigma_{Total}^2}$$

Zusammenhang:

$$\rho_P = 1 - \rho_M$$

Maße für die Messmittelfähigkeit

Für das Beispiel ergibt sich:

$$\hat{\rho}_M = \frac{1,80}{50,10} = 0,036$$
$$\hat{\rho}_P = \frac{48,30}{50,10} = 0,964$$

Anteil der Varianz des Messsystems an der Gesamtvarianz: 3,6%

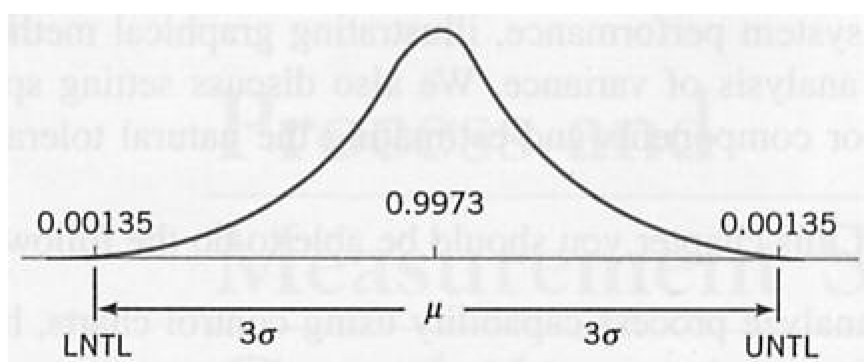
Maße für die Messmittelfähigkeit

„precision-to-tolerance“ Verhältnis P/T:

$$P/T = \frac{k\,\sigma_g}{USL - LSL}$$

weit verbreitete Wahl für die Konstante k ist k = 6:

$$UNTL = \mu + 3\,\sigma$$
$$LNTL = \mu - 3\,\sigma$$



Maße für die Messmittelfähigkeit

Für das Beispiel ergibt sich mit den Spezifikationsgrenzen des Power Moduls LSL = 18 und USL = 58:

$$P\hat{/}T = \frac{6\hat{\sigma}_g}{USL - LSL} = \frac{6 \cdot 1{,}34}{58 - 18} = 0{,}20$$

➔ Das Messgerät verursacht eine Variation in den Messwerten in einer Breite 20% so groß wie der Toleranzbereich für das gemessene Objekt.

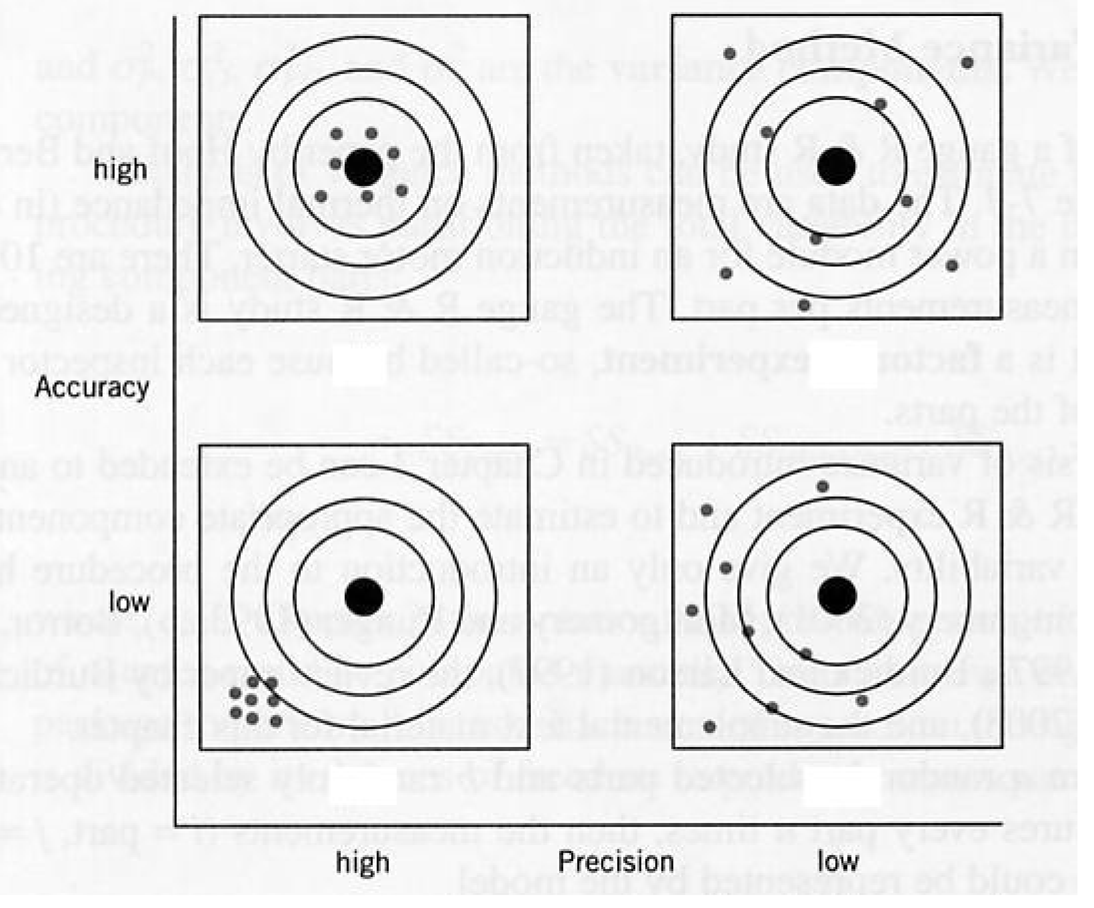
Maße für die Messmittelfähigkeit

signal-to-noise ratio (SNR):

$$SNR = \sqrt{\frac{2\rho_P}{1-\rho_P}}$$

Für das Beispiel beträgt das SNR:

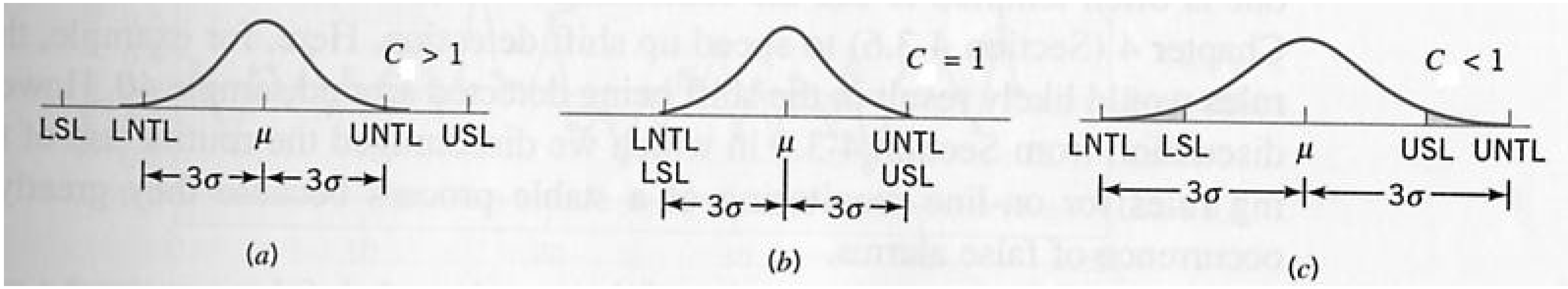
$$S\hat{N}R = \sqrt{\frac{2\hat{\rho}_P}{1-\hat{\rho}_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}964}{1-0{,}964}} = 7{,}32$$


high
Accuracy
low
high
Precision
low

Messfähigkeitsindizes C_g und C_{gk}

$$C_g = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

- USL – LSL: Spanne des Toleranzbereichs für die Messung
- 6σ: Streubreite des Messgeräts, in dem sich 99,73% der Messwerte befinden (vorausgesetzt Normalverteilungsannahme ist korrekt)



Messfähigkeitsindizes C_g und C_{gk}

Der Kehrwert von C_g gibt eine anschauliche Interpretation:

$$P = \frac{1}{C_g}$$

➔ P ist der Anteil am Toleranzbereich, den das Messgerät durch seine Streuung belegt

Messfähigkeitsindizes C_g und C_{gk}

PCRs für einseitige Toleranzgrenzen:

$$C_{go} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}$$

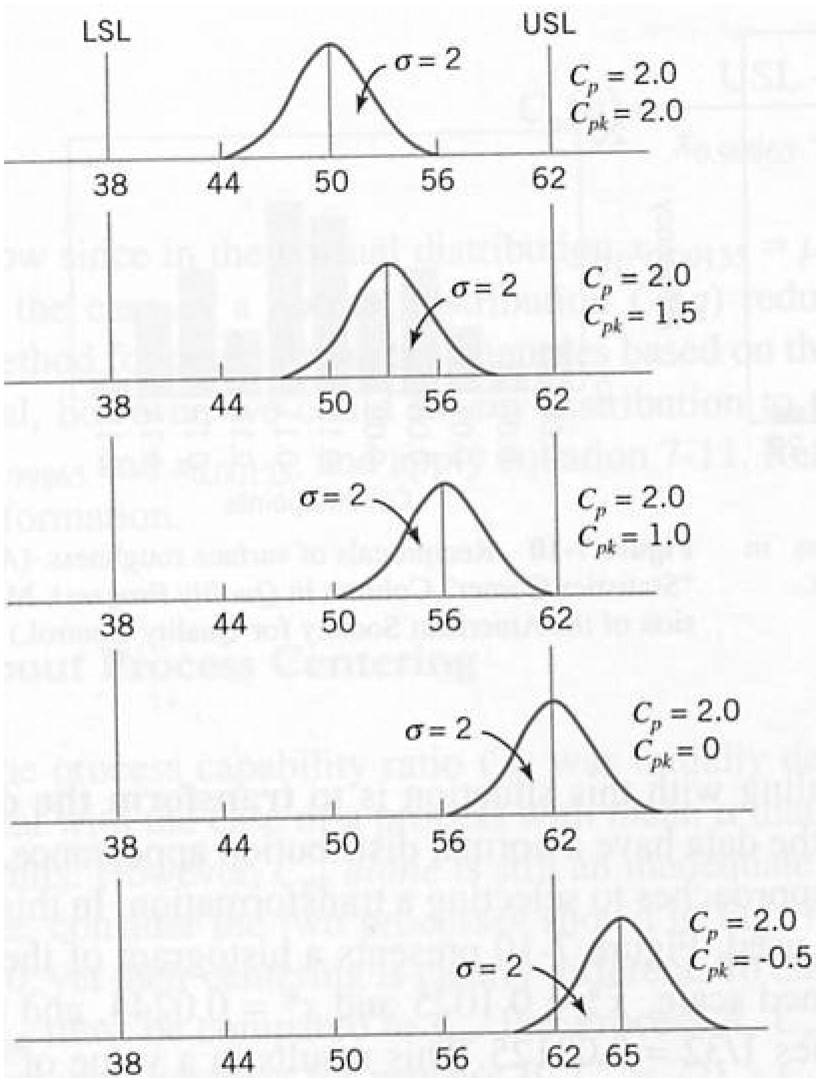
$$C_{gu} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}$$

Minimum dieser PCRs:

$$C_{gk} = min(C_{go}, C_{gu})$$

→ kann genutzt werden um ein Messgerät auf systematischen Fehler zu prüfen

Messfähigkeitsindizes C_g und C_{gk}



- $C_g = C_{gk}$ => kein systematischer Fehler
- $C_{gk} < C_g$ => mittlerer gemessener Wert weicht vom wahren Wert des Normals ab
- je höher die Differenz, desto wahrscheinlicher ist ein systematischer Fehler

Messfähigkeitsindizes C_g und C_{gk}

Beispiel

Normal mit bekanntem wahren Wert x = 20. Es werden 25 Messungen durchgeführt, die die Werte 21.0, 20.3, 20.1, 19.6, 20.0, 19.3, 20.2, 20.4, 19.5, 19.4, 20.4, 19.0, 20.3, 20.3, 19.8, 20.5, 20.1, 20.0, 19.4, 20.6, 20.0, 20.3, 20.1, 19.6, 19.9 liefern. Der Toleranzbereich für das Messgerät liegt zwischen LSL = 18 und USL = 22.

$$\hat{\mu} = 20$$
$$\hat{\sigma} = 0{,}46$$
$$\hat{C}_g = \frac{22-18}{6 \cdot 0{,}46} = 1{,}45$$
$$\hat{P} = \frac{1}{1{,}45} = 0{,}69$$

Messfähigkeitsindizes C_g und C_{gk}

$$\hat{C}_{go} = \frac{22-20}{3 \cdot 0{,}46} = 1{,}45$$

$$\hat{C}_{gu} = \frac{20-18}{3 \cdot 0{,}46} = 1{,}45$$

$$\hat{C}_{gk} = min\left(1{,}45\,;1{,}45\right) = 1{,}45$$

C_{gk} = 1,45 = C_g => kein systematischer Fehler im Messsystem

Zusammenfassung

- Mess-System-Analyse durch ANOVA-Methode liefert die Varianz eines Messsystems aufgegliedert in Wiederholbarkeit und Reproduzierbarkeit
  - ➔ Grundlage:
    - zufällige Auswahl der Bediener und gemessenen Teile
    - Normalverteilungs- und Unabhängigkeitsannahme für die Effekte
- Maße für die Messmittelfähigkeit:
  - ρ_M Anteil der Messsystemvarianz an der Gesamtvarianz
  - P/T „precision-to-tolerance“ Verhältnis
  - SNR „signal-to-noise ratio“
- Messmittelfähigkeitsindizes C_g und C_{gk} dienen unter Verwendung eines Normals zur Untersuchung eines Messsystem auf einen systematischen Fehler

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!