Journal of Quantitative Analysis in Sports

Estimating the Effect of the Red Card in Soccer: When to Commit an Offense in Exchange for Preventing a Goal Opportunity

Bachelor-Seminar: Statistik im Sport

im Studienfach Statistik

angefertigt von:	Julia Kammerer
Matrikelnummer:	6051778
Betreuer:	Sebastian Kaiser
Datum:	28.11.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Fußball ist eine der beliebtesten und meist präsentesten Ballsportarten, v.a. in Deutschland. Nicht wenige bekennen sich als Fan eines bestimmten Vereins. Täglich stolpert man über dieses Thema, wenn man in der Zeitung den Sportteil aufschlägt oder sich im Internet bzw. Fernsehen über die Neuigkeiten des Tages informiert.
Jedes Wochenende gehen Hunderttausende von Menschen an den Bundesligaspieltagen in die Stadien, um live dabei zu sein, wenn ihr Team spielt. Beispielsweise ist die Allianz-Arena in München bei jedem Bayern-Spiel so gut wie ausverkauft.
Doch die wohl bedeutendsten Events für alle Fußballbegeisterten sind die Welt- und Europameisterschaften. 2006 fand die WM bei uns in Deutschland statt und Unzählige zog es vor den Fernseher, in die Stadien oder zu Public Viewing-Veranstaltungen.
Auch bei Sport-Wetten ist Fußball sehr beliebt. Ständig werden Wetten über Spielausgänge auf Wettmärkten verkauft und gekauft. Das vorliegende Paper *„Estimating the Effect of the Red Card in Soccer: When to Commit an Offense in Exchange for Preventing a Goal Opportunity“* aus dem Journal of Quantitative Analysis in Sports von den Verfassern Jan Vecer, Frantisek Kopriva und Tomoyuki Ichiba, auf dem diese Seminararbeit beruht, beschäftigt sich genau mit der Analyse dieser Thematik.

1.1 Spielidee

Die Begeisterung für Fußball ist wohl hauptsächlich dadurch zu begründen, dass es eine sehr schnelle und dynamische Sportart ist, bei der es während eines Spiels immer wieder zu überraschenden Aktionen kommen kann und es dadurch für den Zuschauer nur selten langweilig wird. Außerdem ist die Spielidee[1], die in diesem Abschnitt kurz dargestellt wird, für jeden leicht zu verstehen.
In einer Partie treten zwei Mannschaften gegeneinander an und versuchen einen Leder- oder Kunststoffball möglichst oft in das gegnerische Tor zu schießen und gleichzeitig soll verhindert werden, dass der Ball ins eigene Tor befördert wird. Eine Mannschaft besteht aus 10 Feldspielern und dem Torwart. Die Feldspieler unterscheidet man anhand ihrer Positionen als Stürmer, Mittelfeldspieler und Abwehrspieler. Gewonnen hat die Mannschaft, die

[1] Der Brockhaus, 2003, S. 304.

am Ende des Spiels die meisten Tore erzielt hat. Während eines Spiels dürfen höchstens drei Spieler aus dem Team durch Auswechselspieler ersetzt werden. Die reguläre Spielzeit dauert 2 x 45 Minuten und zwischen den beiden Halbzeiten gibt es eine Pause von 15 Minuten. Durch zu viele Spielverzögerungen (z.B. durch Fouls und durch Verletzungen von Spielern) kann es, nach den 90 und nach den ersten 45 Minuten zu einer Nachspielzeit von ein paar Minuten kommen. Nach der Halbzeitpause wechseln die Spieler die Spielfeldseiten. Gespielt wird auf einem rechteckigen Feld und die Leitung des Spiels hat ein Schiedsrichter, der von zwei Linienrichtern unterstützt wird. Diese müssen unparteiisch sein und den Einhalt der Spielregeln durch beide Teams überwachen.

1.2 Wichtigste Grundregeln[2] [3]

Die 10 Feldspieler jeder Mannschaft spielen den Ball hauptsächlich mit den Füßen, dürfen ihn aber auch mit anderen Körperteilen, abgesehen von Armen und Händen, berühren. Nur der Torwart darf den Ball innerhalb des eigenen Strafraums mit den Händen annehmen und abspielen, solang es sich hierbei nicht um ein deutliches Zuspiel eines Mitspielers handelt.
Zu Beginn des Spiels (Anstoß) und nach jedem erzielten Tor wird der Ball am Mittelkreis angespielt.
Als Tor bezeichnet man eine Situation, in der der Ball komplett die Torlinie zwischen den beiden Torpfosten und unterhalb der Querlatte überschritten hat.
Falls der Ball über die Seitenlinien ins Aus geht, gibt es Einwurf durch die gegnerische Mannschaft, wobei der Ball mit den Händen wieder ins Spiel eingeworfen wird. Zwei Möglichkeiten, den Ball wieder ins Spiel zu bringen, gibt es, wenn der Ball über die Torlinie hinausgeht: Wurde der Ball zuletzt vom Gegner gespielt, gibt es Abstoß vom Tor. Wenn ein Spieler der eigenen Mannschaft zuletzt am Ball war, gibt es einen Eckball für die Gegner.
Kommt es zu einem Regelverstoß, durch leichte Fouls wird dieser mit einem Freistoß für die Gegner geahndet. Falls gewisse Verstöße gegen die Regeln allerdings im eigenen Strafraum (16,50m vor dem Tor) stattfinden (z.B. Foul an einem Stürmer oder Handspiel), gibt es für die Gegner einen Strafstoß, besser bekannt als Elfmeter.

[2] http://members.chello.at/hhofer/fussball_regeln-gelbe_karte-rote_karte-karten.htm. (Aufgerufen: am 26.11.2009).
[3] Der Brockhaus, 2003, S. 304.

Bei gröberen Unsportlichkeiten (z.B. „Schwalbe“, Ballwegschießen, oder Spielverzögerung), absichtlichem Handspiel, Kritisieren des Schiedsrichters, leichten Raufereien und etwas schwereren Fouls, kann ein Spieler die gelbe Karte bekommen, d.h. er wird fürs Erste verwarnt. Bei wiederholtem Regelverstoß sieht der Spieler die gelb-rote Karte (damit ist die zweite Gelbe Karte im Spiel gemeint) und es kommt zum Ausschluss für das momentane und das kommende Spiel.

Bei schwereren Vergehen (z.B. Foul von hinten, wenn nicht die Abnahme des Balls das primäre Ziel ist), bestimmten taktischen Fouls (z.B. durch den am weitesten hinten stehenden Verteidiger), Beleidigung des Schiedsrichters oder eines Spielers (verbal und körperlich) oder absichtliches Handspiel, mit dem ein Tor verhindert wird, bekommt der betroffene Spieler die rote Karte und muss das Spielfeld sofort verlassen und je nach Urteil eines Gremiums wird der Spieler für mindestens zwei Spiele gesperrt.

Nach der Vergabe der roten Karte, muss die betroffene Mannschaft das Spiel mit einem Mann weniger fortsetzen. Mit der Bezeichnung „rote Karte“ kann in der Seminararbeit ebenso die oben bereits erwähnte gelb-rote Karte gemeint sein.

2 Problemstellung

Jetzt stellt sich die Frage, ob diese Suspendierung irgendwelche Auswirkungen auf die Trefferquoten der beiden Mannschaften im weiteren Spielverlauf und auf das Endergebnis hat

Wird eine Mannschaft durch eine rote Karte bestraft, muss sie mit einem Mann weniger weiterspielen und hat dadurch vermutlich weniger Chancen auf einen Sieg oder ein Unentschieden. Dennoch ist evtl. durch das Foul, das zu einer roten Karte geführt hat, ein Tor des Gegners verhindert worden. Man kann sich also auch Gedanken machen, ob es nicht manchmal zweckmäßig ist, eine rote Karte (mit oder ohne Elfmeter) in Kauf zu nehmen.

Im Rahmen dieser Seminararbeit werden die angesprochenen Aspekte, anhand von vorliegenden statistischen Analysen und Methoden im Paper, dargestellt. Eine genauere Erläuterung des Ziels der statistischen Analyse kommt im nächsten Abschnitt.

2.1 Ziel

Ziel der statistischen Analyse im Paper ist es zu zeigen, dass die Trefferquote des Teams mit nur 10 Mann signifikant fällt, wogegen sich die Trefferquote des gegnerischen Teams leicht verbessert. Das kann sich natürlich auch auf den Spielstand auswirken, denn statistisch gesehen fallen nach einer roten Karte im Spiel weniger Tore, wenn die stärkere Mannschaft bestraft wird und mehr, wenn das schwächere Team eine rote Karte gesehen hat. Interessant ist also die Frage, ob es einen sinnvollen Zeitpunkt für eine rote Karte gibt und wovon dieser möglicherweise abhängen könnte.

2.2 Vorgehensweise

Im Gegensatz zu vorhergehenden Studien[4] über den Einfluss von roten Karten in Fußballspielen, wurde in dieser nicht eine ganze Stichprobe betrachtet, sondern jedes einzelne Spiel einer Grundgesamtheit an Spielen. Dies ermöglichte den Analytikern seltenere Situationen, wie zum Beispiel mehrere rote Karten in einem einzelnen Spiel in ihre Untersuchung mit einzubeziehen. Hier würde nämlich die Schätzung aus einer Stichprobe unzuverlässig sein, falls sie nur sehr wenige dieser Ereignisse enthält.

Eine weitere entscheidende Verbesserung in der Vorgehensweise der Studie ist die Wahl der Daten. Während man sich in älteren Untersuchungen auf Spiele von Nationalligisten, die sich zum größten Teil auf fast gleichem Niveau befinden, beschränkte, hat man sich für internationale Top-Mannschaften entschieden, zwischen denen sich eine höhere Dynamik im Spielverlauf entwickeln kann, da sie eben nicht alle auf gleichem Niveau spielen. Man hat versucht, die oben genannten Ziele anhand von Wettquoten aus „In-Play- Wettmärkten“ der WM 2006 und der EM 2008 statistisch zu belegen.

[4] Forsythe et al., 1992, Ridder et al., 1994, Bar-Eli et al., 2006.

3 „Der-In-Play-Wettmarkt“

Das Besondere an einem „In-Play-Wettmarkt“[5], z.B. betfair.com ist, dass man sich die Quoten, zu denen man wetten möchte, selber aussuchen kann und andere Spieler können bei Interesse einen Vertrag eingehen und zu dieser Quote den Gegenpart einnehmen.

Die für die Datenerhebung genutzten Verträge konnten vor und während des aktuellen Spiels abgeschlossen und sogar innerhalb der Spielzeit geändert werden. Die Preise aller gehandelten Verträge wurden sofort durch ein Tor oder eine rote Karte beeinflusst und verfielen nach Ablauf der regulären Spielzeit (90 Minuten + Nachspielzeit). AUF und GEGEN die folgenden, für die Analyse berücksichtigten 7 Verträge konnte man wetten:

1. Team 1 gewinnt,
2. Team 2 gewinnt,
3. Unentschieden,
4. Team 1 erzielt das nächste Tor,
5. Team 2 erzielt das nächste Tor,
6. Es fallen keine Tore mehr im restlichen Spiel,
7. Es fallen noch mindestens drei Tore.

Die Wetteinsätze werden als Wettquoten in der Form $1{:}\,x$ dargestellt und können als Wahrscheinlichkeiten (= Odds)[6] bestimmter Ereignisse interpretiert werden, d.h.

$$\text{Eintrittswahrscheinlichkeit} = \left(\frac{1}{\text{Wettquote}}\right) .$$

3.1 System von „Back“ und „Lay“

Gewettet wird nach folgendem Lay & Back – System:

Als Nutzer von betfair.com hat man die Möglichkeit mit den Wettquoten x^{back} und x^{lay} AUF („Back“) und GEGEN („Lay“) ein Ereignis zu wetten.

„Back“ entspricht dem klassischen Wetten auf ein bestimmtes Ereignis und man gewinnt, wenn das Ereignis eintritt. Wettet man AUF ein Ereignis, zahlt man pro Wette z.B. 1€ ein und

[5] http://www.betfair.com/de/aboutUs/. (Aufgerufen am: 26.11.2009).

[6] http://www.wettstern.com/wettquoten-berechnen, (Aufgerufen am: 18.11.2009).

gewinnt entweder x^{back} € und macht dabei einen Gewinn von $(x^{back} - 1)$€ oder man verliert seinen 1€ Einsatz.

Wenn man die Option „Lay“ wählt, nimmt man automatisch den Gegenpart zu „Back“ ein. Der Part „Lay“ würde beispielsweise bei einer Wette „Team 1 siegt“ gewinnen, wenn jedes Ereignis außer diesem eintritt, also Team 1 verliert oder spielt unentschieden. Wettet man nun GEGEN ein Ereignis, zahlt man z.B. $(x^{lay} - 1)$€ ein und kann entweder x^{lay} zurückbekommen mit 1€ Gewinn oder man verliert alles was man zuvor eingezahlt hat. Der 1€ wird hier abgezogen, da die Wette sozusagen zu diesem Preis verkauft wird.

Der Markt ist so aufgebaut, dass zu jeder Zeit $x^{back} < x^{lay}$ gilt. Also hat der, der GEGEN ein Ereignis wettet zwar mehr Einsatz zu zahlen, aber dafür, bedingt durch stets zwei passende Ereignisse, eine größere Gewinnchance. Auf der anderen Seite hat der, der „Back“ wählt zwar weniger Gewinnchancen, da immer nur ein einziges Ereignis passt, aber dafür geht er auch ein geringeres Risiko ein, indem er weniger zu zahlen hat.

3.2 Einfluss der roten Karte auf die Wettquoten

Da nach einem Ereignis, wie z. B. einer roten Karte, der Handel auf dem Wettmarkt für eine bestimmte Zeit gestoppt wurde, hatten die Nutzer die Gelegenheit, sich wieder neu zu ordnen und eventuell ihre Wettquoten zu ändern. So konnte man den Unterschied in den Wettquoten direkt vor und nach einer roten Karte leicht identifizieren und vergleichen, wie folgende Tabelle[7] illustriert:

	Before RC		After RC	
Contract	Back	Lay	Back	Lay
Italy	1.87	1.88	2.68	2.70
Australia	8.40	8.60	4.40	4.90
The Draw	2.78	2.80	2.42	2.44
Italy Next Goal	1.82	1.83	2.50	3.00
Australia Next Goal	6.40	7.00	3.55	4.20
No Goal	3.20	3.30	2.84	2.98
Three or More Goals	6.80	7.20	6.00	11.00

Tabelle 1: Wettchancen für verschiedene Wettverträge im Spiel Italien – Australien, unmittelbar vor und nach der roten Karte für Italien in der 50. Minute.

[7] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 3.

In diesem Beispiel wurde Italien in der 50. Minute mit einer roten Karte bestraft und in Konsequenz dazu haben sich die Wettquoten, für einen Sieg der Italiener direkt nach der 50. Minute von 1:1.87 auf 1:2.88 vergrößert, d.h. ein Sieg wurde für weniger wahrscheinlich gehalten.

Die Marktquoten können als Likelihood-Schätzer für die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Ereignis eintritt, dienen. Beispielsweise lag die Chance, dass Italien gewinnt vor der roten Karte zwischen 1:1.88 und 1:1.87 und die Wahrscheinlichkeiten, die sich daraus ergeben liegen im Intervall (0.532, 0.535). Nach der roten Karte hat sich das Intervall auf (0.370, 0.373) verkleinert, d.h. die Wettquoten wurden höher. Um nun die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten vor und nach der roten Karte im Spielverlauf zu analysieren, wurden die Trefferquoten der beiden Mannschaften als grundlegende Parameter der Analyse betrachtet.

4 Erläutern der statistischen Methodik

Im Fußball gibt es Ereignisse, die man statistisch auswerten kann und dafür wird jeweils eine bestimmte statistische Methodik angewendet. Im Paper wurde die Auswirkung einer roten Karte in einem Fußballspiel, anhand der im nächsten Abschnitt kurz erklärten Methoden geschätzt.

4.1 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung wird wie folgt[8] dargestellt:

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & x \in \{0,1,\dots\} \\ 0, & sonst \end{cases} .$$

Dabei wird die diskrete Zufallsvariable X = “Anzahl der Ereignisse, die sich innerhalb eines Zeitintervalls [0, 1] ereignen“, betrachtet. Der Parameter λ für die erwartete Anzahl an Ereignissen muss größer null sein. Es gilt: $E(X) = \lambda \, und \;\, V(X) = \lambda$.

[8] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, 2007, S. 262.

4.2 Regressionsanalyse

Die Anwendung der Regressionsanalyse beschränkt sich im Paper auf die einfache lineare Regression[9] mit folgender Formel:

$$\boldsymbol{Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i} \ .$$

Die Regressionsanalyse[10] setzt voraus, dass es einen gerichteten linearen Zusammenhang gibt (=Korrelation), d.h. es existieren eine abhängige Zielvariable Y und mindestens eine unabhängige Kovariable X (Regressor oder erklärende Variable). Das Hauptziel der Regressionsanalyse ist es, den Einfluss der erklärenden Variablen auf den Mittelwert der Zielgröße zu untersuchen, d.h. den bedingten Erwartungswert $\boldsymbol{E(Y|x_1, \dots, x_k)}$ von Y in Abhängigkeit der Kovariablen zu bilden. Dabei wird eine Funktion errechnet, welche die Abhängigkeit der Variablen mit einer Geraden beschreibt. Die ermittelte Regressionsgerade ermöglicht es, durch Einsetzen von Werten für die unabhängige Variable Prognosen zu berechnen. Regressionsanalysen werden häufig bei Variablen durchgeführt, für die ein statistischer Zusammenhang ermittelt wurde.
Das Bestimmtheitsmaß[11] R^2 drückt hierbei aus, wie gut die Regressionsgerade die Korrelation zwischen der abhängigen und der unabhängigen Variablen wiedergibt. Es entspricht somit der Güte des Modells und gibt an, wie viel Prozent der Streuung durch das Modell erklärt werden. Es nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, wobei $R^2 = 1$ den bestmöglichen Zustand (alle Werte liegen auf der Geraden) darstellt. Mit einem $R^2 = 0$ besteht hingegen kein Zusammenhang.

4.3 Minimax-Schätzung

Der Minimax-Satz[12] beinhaltet das Minimalprinzip und das Maximalprinzip. Vor allem wird die Minimax-Schätzung in der Spieltheorie verwendet, um Zweipersonen-Nullsummenspiele[13] zu lösen, d.h. beide Spieler können nur das gewinnen, was der andere jeweils einsetzt (Nullgewinn). Hier ist bei beiden Spielern die Minimierung der gegnerischen maximalen Auszahlung primäres Ziel. Entsprechend soll dabei jeweils der eigene Gewinn maximiert

[9] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, 2007, S. 154.
[10] Ludwig Fahrmeier, Thomas Kneib, Stefan Lang, 2009, S. 19f.
[11] Ludwig Fahrmeier, Thomas Kneib, Stefan Lang, 2009, S. 98.
[12] Olle Häggström, 2006, S. 35f.
[13] Olle Häggström, 2006, S.32f.

werden. Dieses Konzept wird angewendet, wenn man so wenig wie möglich riskieren möchte, um seinen persönlichen Schaden/ Verlust so gering wie möglich zu halten. Der Minimax-Satz besagt, dass jedes endliche Zweipersonen-Nullsummenspiel einen eindeutigen minimalen, bzw. maximalen Wert hat, wenn es mit gemischten[14] Strategien gespielt wird, was bedeutet, unter Zufallsvoraussetzungen zu spielen.
Ein einfaches Beispiel soll das Konzept der Minimierung des kleinstmöglichen Schadens erläutern:
Mit der angenommen Wahrscheinlichkeit von p= 0,5 wird man im Zug kontrolliert. Je nach Große des Schadens, werden die Werte -10, -5, 5 und 10 zugeordnet.

	Kontrolle	Keine Kontrolle	Maximaler Schaden
Fahrkarte	10	-5	-5
Keine Fahrkarte	-10	5	-10

Der größte Schaden entsteht, wenn man keine Fahrkarte hat (-10) und um diesen Schaden so gering wie möglich zu halten, ist es in jeder Situation am besten, mit einer Fahrkarte zu fahren (-5).

4.4 Kleinste-Quadrate-Schätzung

Die Methode der kleinsten Quadrate[15] wird zur Berechnung der Ausgleichsgeraden

$$f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

im Regressionsmodell verwendet. Diese sollte so gewählt werden, dass die Abweichungen der einzelnen Datenpunkte von der Geraden möglichst gering sind.
Dabei verwendet man die quadrierten Abweichungen der prognostizierten von den gemessenen y-Werten der Zufallsvariablen Y. Mit dem Prinzip der KQ-Methode[16] sollen nun die Schätzer $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ für α und β durch Minimierung der Summe der quadratischen Abweichungen bestimmt werden.

[14] Olle Häggström, 2006, S. 33f.
[15] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, 2007, S. 154.
[16] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, 2007, S. 480.

Dabei wird folgende Formel verwendet:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 \to \min_{\beta_0,\beta_1} .$$

Der Ausdruck wird quadriert, damit sich positive und negative Abweichungen nicht gegeneinander aufheben können.

Allerdings kann man laut dem Paper statt des quadrierten Ausdrucks auch die Beträge der Abstände minimieren:

$$\sum_{i=1}^{n}|Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)| \to \min_{\beta_0,\beta_1} .$$

Durch den Betrag wird auch hier verhindert, dass sich gewisse Abweichungen zu 0 aufsummieren lassen.

5 Umsetzung der statistischen Methodik

Nach der Erläuterung zur statistischen Analyse geht es nun endlich um die Anwendung der Statistik auf reale Fußballdaten. In jeder Datenanalyse[17] werden Daten zunächst erhoben, dann mit Hilfe statistischer Methoden komprimiert, dargestellt und analysiert.

5.1 Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeiten

Die Poisson-Verteilung wird im Paper verwendet, um die Beziehung zwischen den Trefferquoten und den theoretischen Wahrscheinlichkeiten für die 7 möglichen Verträge zu ermitteln. Die Zufallsvariable K = „Anzahl an Toren, die ab dem Zeitpunkt t für Team 1 fallen“, ist Poisson-verteilt mit Parameter λ_t. Die Zufallsvariable I = „Anzahl an Toren, die ab dem Zeitpunkt t für Team 2 fallen“ ist Poisson-verteilt mit Parameter μ_t. Hierbei sei λ_t die erwartete Anzahl an Toren für Team 1 und μ_t die erwartete Anzahl an Toren für Team 2 in der restlichen Spielzeit vom Zeitpunkt t bis Spielende T. Demnach ist $X_t\colon Y_t$ der momentane Spielstand zum Zeitpunkt t und $X_T\colon Y_T$ der Endspielstand. Es wird angenommen, dass beide Parameter unabhängig sind, da die Korrelation der Trefferquoten zwischen den 2 Teams ver-

[17] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, 2007, S. 14.

nachlässigbar klein ist. In der EM 2008 ergab der Korrelationskoeffizient beispielsweise nur einen Wert von 0,13.

5.1.1 Team 1 gewinnt

Team 1 muss für einen Sieg insgesamt mehr Tore erzielen als Team 2, also gilt hier der Ansatz $\mathbb{P}(X_T > Y_T)$. Der Spielstand X_T für das Sieger-Team setzt sich zusammen aus der Summe der noch fallenden Tore k und der bereits gefallenen Tore X_t. Für das gegnerische Team muss der Endspielstand Y_T natürlich kleiner sein als diese Summe. Da k verschiedene Werte von 0 bis ∞ annehmen kann, läuft das Ganze über eine Summe mit dem Laufindex beginnend bei k = 0.
Somit ergibt sich:

$$\mathbb{P}(X_T > Y_T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_T = k + X_t, Y_T < k + X_t)\,.$$

Nun wird für die Wahrscheinlichkeitsberechnung die Poisson-Verteilung eingesetzt, wobei der Laufindex i für die Zufallsvariable I eine bestimmte obere Grenze $i = k + X_t - Y_t - 1$ besitzt. Diese gewährleistet, dass für Team 2 weniger Tore fallen als für Team 1. Es muss außerdem die Unabhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen K und I gelten. Insgesamt ergibt sich folgende Formel:

$$\begin{aligned} Team\ 1\ siegt = \mathbb{P}(X_T > Y_T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_T = k + X_t, Y_T < k + X_t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-\lambda_t} \frac{{\lambda_t}^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k+X_t-Y_t-1} e^{-\mu_t} \frac{{\mu_t}^i}{i!} \right]. \end{aligned}$$

5.1.2 Unentschieden

Bei einem Unentschieden müssen die Mannschaften am Ende des Spiels gleich viele Tore X_T und Y_T erzielt haben. Die Wahrscheinlichkeit setzt sich hierfür, unter Verwendung der Poisson-Verteilung, aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(\text{„kein Tor wird mehr erzielt"}) = e^{-(\lambda_t + \mu_t)} \text{ (Herleitung unter } \mathbf{5.1.5})$$

und

$$\mathbb{P}(\text{„Entweder Team 1 oder Team 2 muss noch k Tore schießen“})$$
$$= \frac{{\lambda_t}^{(k+\max(X_t,Y_t)-X_t)}}{(k+\max(X_t,Y_t)-X_t)!} \cdot \frac{{\mu_t}^{(k+\max(X_t,Y_t)-Y_t)}}{(k+\max(X_t,Y_t)-Y_t)!}$$

zusammen.

Damit ergibt sich insgesamt die Formel:

$$Unentschieden = \mathbb{P}(X_T = Y_T)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-(\lambda_t+\mu_t)} \cdot \frac{{\lambda_t}^{(k+\max(X_t,Y_t)-X_t)}}{(k+\max(X_t,Y_t)-X_t)!} \cdot \frac{{\mu_t}^{(k+\max(X_t,Y_t)-Y_t)}}{(k+\max(X_t,Y_t)-Y_t)!} \right].$$

5.1.3 Team 2 gewinnt

Unter Verwendung der Herleitung aus **5.1.1** erhalten wir die Formel:

$$Team\ 2\ siegt = \mathbb{P}(Y_T > X_T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_T = k + Y_t, X_T < k + Y_t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-\mu_t} \frac{{\mu_t}^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k-X_t+Y_t-1} e^{-\lambda_t} \frac{{\lambda_t}^i}{i!} \right].$$

5.1.4 Team 1 erzielt das nächste Tor

Jetzt braucht man kein Summenzeichen mehr, da es sich hier nur um ein einziges Tor handelt, d.h. $k = 1$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tor fällt, unabhängig von welchem Team, ist gegeben durch die Gegenwahrscheinlichkeit (aus **5.1.6**) von $\mathbb{P}$(kein Tor wird mehr erzielt“):

$$1 - e^{-(\lambda_t+\mu_t)}.$$

Damit man nun aber die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\text{"Team 1 erzielt das nächste Tor"})$ erhält, muss noch die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\text{"Team 1 erzielt ein Tor"})$ dazu multipliziert werden.

Diese ergibt sich durch den Quotienten aus λ_t und der Summe aus λ_t und μ_t, d.h. man teilt die erwartete Anzahl an Toren von Team 1 durch die Summe aus der erwarteten Anzahl an Toren von Team 1 und Team 2. Zusammenhängend betrachtet ergibt sich:

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_t + \mu_t} \cdot \left[1 - e^{-(\lambda_t + \mu_t)}\right].$$

5.1.5 Team 2 erzielt das nächste Tor

Die Wahrscheinlichkeit hierfür wird genauso berechnet wie für Team 1, nur mit entsprechender Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\text{"Team 2 erzielt ein Tor"})$. Man erhält:

$$\frac{\mu_t}{\lambda_t + \mu_t} \cdot \left[1 - e^{-(\lambda_t + \mu_t)}\right].$$

5.1.6 Kein Tor

Dieser Zustand besteht, wenn es zu jedem Zeitpunkt im Spiel $0:0$ steht. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\text{"kein Tor"})$ ergibt sich durch Einsetzen von $k = 0$ in die Formel aus **5.1.1** oder **5.1.3.** Man erhält also nach dem Einsetzen

$$e^{-\lambda_t} \cdot \frac{{\lambda_t}^0}{0!} \cdot e^{-\mu_t} \cdot \frac{{\mu_t}^0}{0!} = e^{-\lambda_t} \cdot 1 \cdot e^{-\mu_t} \cdot 1 = e^{-\lambda_t} \cdot e^{-\mu_t}$$

$$= Kein\,Tor = e^{-(\lambda_t + \mu_t)}.$$

5.1.7 Noch mindestens drei Tore fallen im Spiel

Dieses Ereignis besagt, dass die Mannschaften am Ende des Spiels zusammen mindestens 3 Tore erzielt haben müssen ($\mathbb{P}(X_T + Y_T \geq 3)$). Der Einsatz der Poisson-Verteilung erfolgt unter Verwendung eines Summenlaufindexes, der seine untere Grenze bei $k = (3 - X_t - Y_t)^+$ hat. Dadurch werden von den noch fallenden k Toren die bereits erzielten abgezogen und das „+" bedeutet, dass man immer bei dem um eins größeren k beginnt. Da hier beide Mannschaften betrachtet werden, verwendet man die Summe aus $\lambda_t$und μ_t als Parameter der Poissonverteilung.

Das Ergebnis lautet letztendlich:

$$Drei^{+} = \mathbb{P}(X_T + Y_T \geq 3) = \sum_{k=(3-X_t-Y_t)^+}^{\infty} e^{-(\lambda_t+\mu_t)} \frac{(\lambda_t + \mu_t)^k}{k!} \; .$$

5.2 Faires Wetten

Wettanbieter bieten nie faire Quoten an, damit sie aus dem Wettmarkt ihren Profit ziehen können. Die angebotenen Quoten beinhalten immer eine festgelegt Gewinnmarge[18].
Würde es sich hier um faire Quoten handeln, dann würden diese genau den theoretischen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse entsprechen. Da dies nicht der Fall ist, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für „Sieg“, „Unentschieden“ oder „kein Sieg“ nicht exakt zu 100% aufaddieren.

5.2.1 Einfluss auf Gewinn bei „Back“

Mit den hergeleiteten theoretischen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse ergibt sich für den Gewinn bei der Option „Back“ für ein spezielles Ereignis:

$$x^{back} \cdot p - 1 \, .$$

Beim fairen Wetten wäre der Gewinn also immer 0, wenn die Wettquoten den theoretischen Wahrscheinlichkeiten entsprechen würden. Der Gewinn ist positiv, wenn die gewählte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses größer als dessen theoretische Wahrscheinlichkeit ist und negativ, wenn sie kleiner ist.

5.2.2 Einfluss auf Gewinn bei „Lay“

Bei der Option „Lay“ ist das nicht ganz so einfach, da diese einen Einsatz von $(x^{lay} - 1)$€ verlangt, um 1€ zu gewinnen. Der Gewinn errechnet sich wie folgt:

$$\frac{x^{lay}}{x^{lay} - 1} \cdot (1 - p) - 1 \, .$$

[18] http://www.wettstern.com/wettanbieter-know-how/buchmacherquoten. (Aufgerufen am: 20.11.2009).

Hier ist es anders als bei „Back“, denn man erhält einen positiven Gewinn, wenn die gewählte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses kleiner ist als dessen theoretische und einen negativen wenn sie größer ist. Aber der Gewinn wäre auch hier wieder 0, wenn es sich um eine faire Wette handeln würde.

5.3 Schätzung der Trefferquoten

Bisher war nur die Rede von den Wettquoten, aber das eigentliche Ziel ist, die Trefferquoten zweier Mannschaften während eines Fußballspiels zu schätzen. Vor allem interessiert die Veränderung der Trefferquoten nach einer roten Karte und genau das wollten die Verfasser des Papers herausfinden.

5.3.1 Minimax-Schätzung

Um die Trefferquoten λ_t und μ_t aus den Wettchancen des Wettmarkts zu schätzen, wählten sie die Schätzer $\hat{\lambda}_t$ und $\hat{\mu}_t$ so, dass der beste erwartete Gewinn aus allen 7 Verträgen zusammen so klein wie möglich wurde. Verwendet wurde dafür folgendes Prinzip der Minimax-Schätzung:

$$\min_{\lambda_t,\mu_t} \max_i \left(x_i^{back} \cdot \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) - 1; \quad \frac{x_i^{lay}}{x_i^{lay} - 1} \cdot (1 - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t)) - 1 \right).$$

$\mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t)$ steht hier für die theoretische Wahrscheinlichkeit des iten Ereignisses, bei gegebenen Trefferquoten λ_t und μ_t zum Zeitpunkt t. Man setzt die Gewinnformeln von „Back“ und „Lay“ ein, wobei man hier jeweils das Maximum der Gewinne betrachtet, d.h. die Summe aller Gewinne, die man aus den 7 möglichen Verträgen erzielen kann. Die optimale Wahl der Schätzer für die Trefferquoten hält den bestmöglichen Gewinn so gering wie möglich. Für jede andere Wahl wäre die Abweichung von 0 größer.

Die nachfolgende Tabelle 2[19] illustriert die optimale Wahl der Parameterschätzer für das Spiel Italien – Australien kurz vor der roten Karte für Italien in der 50. Minute. Sie zeigt neben den durch die Wettquoten implizierten Wahrscheinlichkeiten auch die theoretischen Wahrscheinlichkeiten, die sich mit den optimalen Parametern $\hat{\lambda}_t = 0{,}980$ und $\hat{\mu}_t = 0{,}265$

[19] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 7.

ergeben. Die Berechnung dieser Parameterwerte war im Paper allerdings nicht dargestellt. Die dick gedruckten Werte in der Spalte „Return“ bedeuten hier zwar positive Gewinne, allerdings ist der bestmögliche Gewinn von 2,2 % weit unter dem Provisionssatz der Wettgesellschaft von 5 %. Also befinden wir uns immer noch im Bereich des fairen Wettens. Wie im Paper erläutert, fiel nach der roten Karte die Trefferquote der Italiener von 0,980 auf 0,677, während sich die Trefferquote der Australier von 0,265 auf 0,477 verbesserte.

Contract	$1/x^{lay}$	$1/x^{back}$	$\mathbb{P}_i(\hat{\lambda}_t, \hat{\mu}_t)$	Return	
				Back	Lay
Italy	0.532	0.535	0.534	-0.002	-0.004
Australia	0.116	0.119	0.099	-0.171	**0.020**
The Draw	0.357	0.360	0.367	**0.022**	-0.016
Italy Next Goal	0.546	0.549	0.560	**0.020**	-0.031
Australia Next Goal	0.143	0.156	0.152	-0.030	-0.010
No Goal	0.303	0.313	0.288	-0.079	**0.022**
Three or More Goals	0.139	0.147	0.130	-0.113	**0.010**

Tabelle 2: Darstellung der, durch die Wettquoten implizierten Wahrscheinlichkeiten (Spalte 1 und 2), der Wahrscheinlichkeiten, die durch Verwendung der Poisson-Verteilung mit der optimalen Wahl der Parameter entstehen (Spalte 3) und der Gewinne, die mit dem Kaufen oder Verkaufen eines Ereignisses zusammenhängen.

5.3.2 Kleinste-Quadrate-Schätzung

Als Alternative zur Minimax-Schätzung ist im Paper die Rede von der Methode der kleinsten Quadrate (L^2):

$$\min_{\lambda_t,\mu_t} \sum_i \left[\left(\frac{1}{x_i^{back}} - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) \right)^2 + \left(\frac{1}{x_i^{lay}} - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) \right)^2 \right].$$

Das Prinzip des KQ-Schätzers sollte durch die vorhergegangene Vorstellung der statistischen Methodik klar sein. Mit dem Prinzip der KQ-Methode werden die Schätzer $\hat{\lambda}_t$ und $\hat{\mu}_t$ für λ_t und μ_t durch Minimierung der Summe der quadratischen Abweichungen, der besagten Wahrscheinlichkeiten zu den theoretischen, bestimmt. Im Gegensatz zur Minimax-Schätzung werden hier nicht die möglichen Gewinne aus den abgeschlossenen Wetten betrachtet, sondern die durch die Wettquoten implizierten Wahrscheinlichkeiten.

Das gleiche Prinzip wird auf die Methode mit den absoluten Abweichungen (L^1) angewendet:

$$\min_{\lambda_t,\mu_t}\sum_i\left[\left|\frac{1}{x_i^{back}}-\mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t)\right|+\left|\frac{1}{x_i^{lay}}-\mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t)\right|\right].$$

Für die Schätzer $\hat{\lambda}_t$ und $\hat{\mu}_t$ ergibt sich zum einen $\hat{\lambda}_t^2 = 0{,}959$ und $\hat{\mu}_t^2 = 0{,}265$ und zum anderen $\hat{\lambda}_t^1 = 0{,}948$ und $\hat{\mu}_t^1 = 0{,}263$. Diese sind nah genug an den Werten der Minimax-Schätzung dran und somit genauso gut für die Schätzung der Trefferquoten geeignet.

Durch eine zu hohe Diskrepanz zwischen den gewetteten Wahrscheinlichkeiten und den theoretischen Wahrscheinlichkeiten entstehen Ausreißer. Vergleicht man jetzt den Minimax-Schätzer und den Kleinste-Quadrate-Schätzer, ergibt sich für Ersteren der Vorteil der Robustheit gegenüber Ausreißern. Die L^1- und die L^2- Schätzer hingegen sind nicht Ausreißer-resistent.

Abbildung 1[20] stellt den Verlauf der Trefferquoten von Italien und Australien, die nach dem Prinzip der Minimax-Schätzung entstanden sind dar. Man sieht deutlich, wie die Trefferquote von Italien nach der roten Karte in der 50. Minute gesunken ist und sich im Gegenzug die Trefferquote von Australien vergrößert hat. Zum Verständnis der Skala auf der X-Achse muss gesagt werden, dass die Zeit während der Pause weiterläuft, denn auch in diesen gekennzeichneten 15 Minuten können durch abgeschlossene Wetten, Aussagen über die Trefferquoten ermittelt werden.

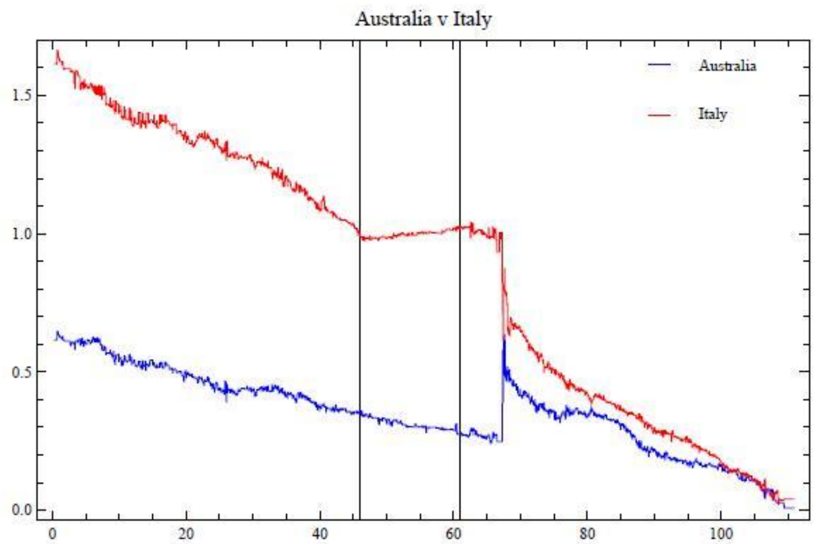

Abbildung 1: Veränderung der implizierten Trefferquote im Spiel Italien - Australien.

[20] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 8.

5.4 Schätzung der Auswirkung einer roten Karte

Wenn ein Spieler eine rote Karte wegen eines Fouls im Strafraum oder sonstigem ernsthaftem Fehlverhalten auf dem Fußballfelder erhält, hat er unverzüglich das Spiel zu verlassen und seine Mannschaft muss das restliche Spiel mit einem Mann weniger bestreiten. Während der WM 2006 wurden insgesamt 28 Spieler suspendiert und in der EM 2008 erhielten 3 Spieler eine rote Karte. Die Studie[21] im Paper enthält insgesamt 27 von den 31 Fällen in denen Spieler das Spiel verlassen mussten. Davon sind 26 Spiele aus der WM 2006 und 3 aus der EM 2008. Von den 31 Karten fielen 2 kurz vor Spielschluss und 2 in der Spielverlängerung und wurden somit nicht für diese Studie berücksichtigt. Es sind darunter auch 4 Fälle von mehreren roten Karten in einem Spiel: 2 rote Karten im Spiel Elfenbeinküste – Serbien, 3 in den Spielen Italien – USA und Kroatien – Australien und 4 im Spiel Portugal – Holland.

Im Weiteren wird die Trefferquote des in der Unterzahl liegenden Teams mit λ bezeichnet. Hierbei unterscheidet man zwischen λ^{old} für die Trefferquote unmittelbar vor der roten Karte und λ^{new} direkt nach der roten Karte. Genauso wird mit dem Parameter μ für die Trefferquote der gegnerischen Mannschaft verfahren: μ^{old} kennzeichnet die Trefferquote direkt vor der roten Karte und μ^{new} diese unmittelbar nach der roten Karte.

Um nun die Veränderung in den jeweiligen Trefferquoten zu prognostizieren, verwenden die Herausgeber des Papers folgende Regressionsanalysen

$$\lambda^{new} = \theta_1 \cdot \lambda^{old} + \epsilon_1 ,$$

und

$$\mu^{new} = \theta_2 \cdot \mu^{old} + \epsilon_2 .$$

Damit soll die Beziehung der abhängigen Variable λ^{new}, bzw. μ^{new} zur unabhängigen Variable $\lambda^{old,}$, bzw. μ^{old} festgestellt werden, wobei θ_1 und θ_2 die Unterschiede in den jeweiligen Trefferquote bestimmen und die Fehlerterme ϵ_1 und ϵ_2 besondere Situationen innerhalb des Spiels darstellen, wie z.B. den Ausschluss eines besonders wichtigen Spielers. Wenn man nun die Regression anhand der Daten durchführt, kommt man auf die Schätzer

$$\hat{\theta}_1 = 0{,}663 \approx \frac{2}{3},$$

[21] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 9.

mit $R^2 = 0{,}972$ und

$$\hat{\theta}_2 = 1{,}237 \approx \frac{5}{4},$$

mit $R^2 = 0{,}991$.

Demzufolge verkleinert sich die Trefferquote des benachteiligten Teams um ungefähr $\frac{2}{3}$ und die Trefferquote des gegnerischen Teams vergrößert sich annähernd um $\frac{5}{4}$.

Die nachfolgenden Abbildungen 4 und 5[22] veranschaulichen die jeweilige Beziehung zwischen den Trefferquoten vor und nach der roten Karte grafisch. Man sieht, dass die Beschreibung der einzelnen Beobachtungen durch die Ausgleichsgeraden bei beiden Teams im Regressionsmodell ziemlich gut ist, denn durch das Regressionsmodell werden für die bestraften Teams 97,2% der Streuung erklärt und für die gegnerischen Teams 99.1%.

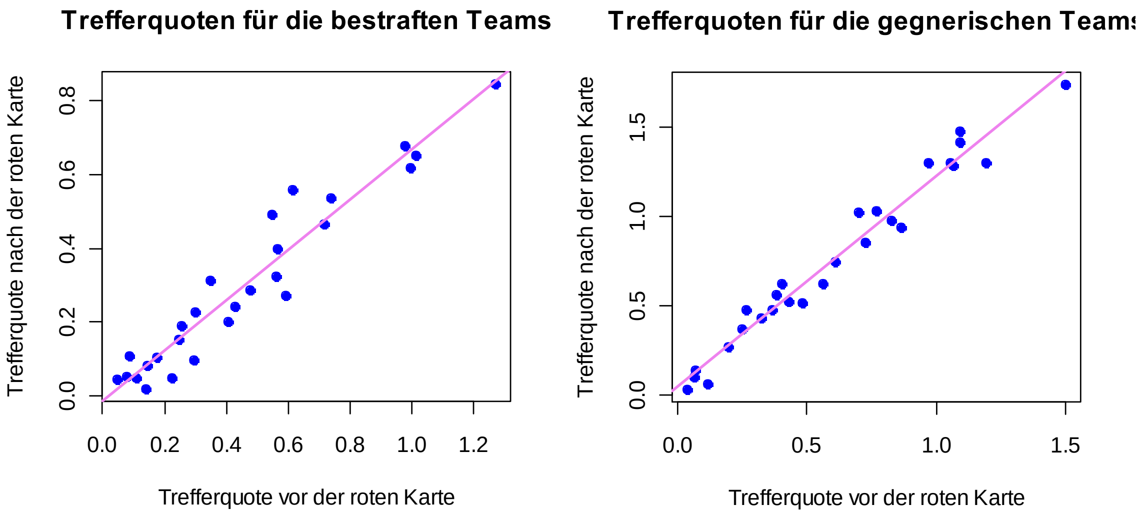

Abbildung 4: Beziehung zwischen der Trefferquote vor und nach der roten Karte für das bestrafte Team.

Abbildung 5: Beziehung zwischen der Trefferquote vor und nach der roten Karte für das gegnerische Team.

5.5 Erwartete Anzahl an Toren nach einer roten Karte

Nachdem nun herausgefunden wurde, dass sich nach einer roten Karte die Trefferquoten beider Mannschaften verändern, stellt sich im Paper nun noch die Frage, ob sich diese Veränderung letztendlich auch auf die Gesamtzahl an Toren auswirkt. Hierbei gelten die Parameter und die berechneten Werte aus dem vorherigen Abschnitt.

[22] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 12f.

Die Gesamttrefferquoten vor und nach der roten Karte sind gegeben durch:

$$\lambda^{old} + \mu^{old}$$

und

$$\lambda^{new} + \mu^{new}.$$

Es muss nunmehr noch geklärt werden, unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$\lambda^{new} + \mu^{new} \geq \lambda^{old} + \mu^{old}$$

erfüllt ist. Wie bereits erwähnt, gilt: $\lambda^{new} \approx \frac{2}{3}\lambda^{old}$ und $\mu^{new} \approx \frac{5}{4}\mu^{old}$. Also ist obige Gleichung annähernd erfüllt, wenn $\mu^{old} \geq \frac{4}{3}\lambda^{old}$ gilt.

Demnach hat man nach der Bestrafung eines schwächeren Teams mehr Tore zu erwarten, als bei der Bestrafung einer stärkeren oder vergleichbaren Mannschaft. Wenn eine stärkere oder vergleichbar starke Mannschaft eine rote Karte erhält, ist der Abfall in der Gesamttrefferquote in den meisten Spielen zu erkennen, da sich die, aus der Suspendierung eines Spielers, resultierende Schwäche der bestraften Mannschaft mehr in der Offensive als in der Defensive zeigt. Bei Benachteiligung des schwächeren Teams sinkt die Trefferquote oder sie bleibt gleich.

Abbildung 6[23] repräsentiert diese Aussagen unter Verwendung der Gleichung $\lambda^{old} = \frac{3}{4}\mu^{old}$ als Gerade im Diagramm.

Die x-Achse zeigt die Trefferquote des gegnerischen Teams vor der roten Karte (μ^{old}) und die y-Achse die des bestraften Teams (λ^{old}) vor der roten Karte. Die Gerade trennt Spiele mit einer ansteigenden (runde Punkte) Gesamttrefferquote (unterhalb - wenn ein schwächeres Team bestraft wird) von Spielen mit einer absinkenden (diamantförmige Punkte) Gesamttrefferquote (oberhalb - wenn ein stärkeres oder vergleichbares Team bestraft wird). Die quadratischen Punkte stehen für Spiele ohne Veränderung der Gesamttrefferquoten nach einer roten Karte.

[23] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 14.

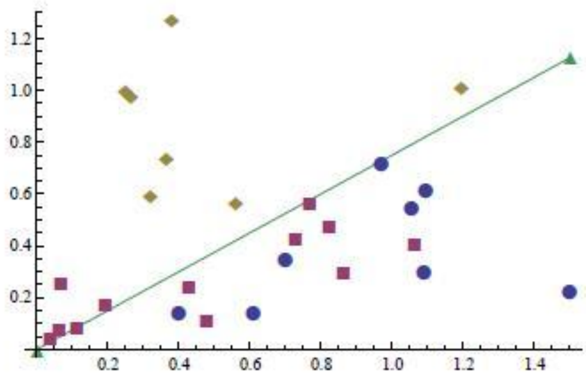

Abbildung 6: Veränderung in der Gesamttrefferquote nach einer Suspendierung eines Spielers, gegeben die relativen Stärken der beiden Teams vor der roten Karte.

5.6 Rote Karte oder Tor

Nach den ganzen statistischen Auswertungen über die Auswirkungen einer roten Karte auf die Trefferquoten ist noch der zweite zentrale Punkt der Seminararbeit zu behandeln. Dieser beschäftigt sich mit der Frage, wann und ob es überhaupt günstig ist, ein Foul, mit nachfolgender roten Karte zu begehen und dabei möglicherweise einen Elfmeter zu riskieren, um im Gegenzug eine gegnerische Torgelegenheit zu verhindern. Betrachten wir erstmals die Situation, ohne auf den bestmöglichen Zeitpunkt für solch eine Handlung zu achten. Falls es kurz vor Spielende unentschieden steht, sollten beide Mannschaften jede sich ihnen bietende Chance nutzen, einen gegnerischen Angriff aufs Tor durch ein Foul im Strafraum zu unterbinden. Wenn es sich dabei um ein fast sicheres Tor der gegnerischen Mannschaft handelt, ist es notwendig, ein Foul mit anschließendem Elfmeter zu riskieren, um zu verhindern, dass man das Spiel verliert. Auf der anderen Seite ist es keineswegs ratsam, ein solches Foul zu begehen, wenn das Spiel entweder gerade erst angefangen hat oder den beiden Parteien noch genügend Zeit bleibt, ein Tor zu erzielen und somit einen möglichen Rückstand aufzuholen und möglicherweise sogar das Spiel zu dominieren.
Jetzt kommt der Punkt des optimalen Zeitpunkts für eine rote Karte mit anschließendem Elfmeter ins Spiel. Dieser Moment hängt von zwei wichtigen Faktoren ab, und zwar dem momentanen Spielstand und dem angestrebten Spielendstand der Mannschaft. Verallgemeinert kann man sagen, dass es das Ziel aller Mannschaften ist, das Spiel nicht in der regulären Spielzeit zu verlieren und einen Sieg oder zumindest ein Unentschieden herauszuholen.

Im Folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse anhand von Grafiken[24] aus der vorliegenden Studie genauer dargestellt. Betrachtet werden zwei Situationen: eine rote Karte wird entweder mit oder ohne einen Elfmeter ausgestellt. Voraussetzungen hierfür sind zwei möglichst vergleichbare Mannschaftsniveaus, eine durchschnittliche Trefferquote von 1,1 in jedem Spiel und eine allgemeine Erfolgsrate von 80 % einen Elfmeter zu verwandeln.

Die nachfolgenden Diagramme veranschaulichen 6 Fälle für die optimale Zeit, ein Foul mit rote Karte mit eventuell folgendem Elfmeter in Abhängigkeit von momentanem Spielstand und derzeitiger Torwahrscheinlichkeit der Gegner zu riskieren. Auf der x-Achse ist die Wahrscheinlichkeit dargestellt, mit der es in der Situation, in der eine rote Karte möglich ist, zu einem Tor führen würde und auf der y-Achse die Spielzeit in Minuten.

Fall 1: *Foul mit roter Karte und nachfolgendem Elfmeter bei derzeitigem Unentschieden:*

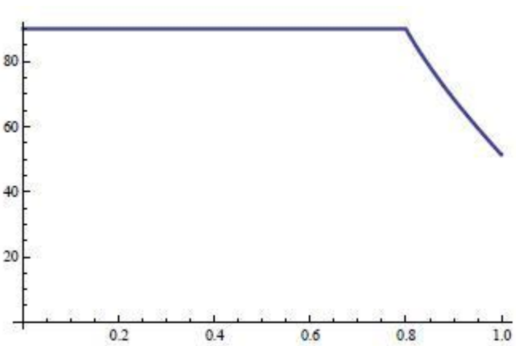

Abbildung 7: Darstellung der optimalen Zeit für ein Foul mit roter Karte und anschließendem Elfmeter, in Abhängigkeit von der gegnerischen Torwahrscheinlichkeit, bei momentanem Unentschieden.

Nach der festgelegten Wahrscheinlichkeit, mit der man durch einen Elfmeter ein Tor erzielt, sollte es vermieden werden, ein solches Foul zu riskieren, falls momentan mit weniger als 80 % Wahrscheinlichkeit ein Tor für die Gegner fallen würde. Liegt die Wahrscheinlichkeit des gegnerischen Stürmers ein Tor zu erzielen hingegen bei mindestens 80 %, ist es durchaus sinnvoll, diesen Spieler im Strafraum zu foulen. Genauer gesagt kommt mit steigender Wahrscheinlichkeit (ab 80 %) der optimale Zeitpunkt für solch ein Foul immer früher im Spiel. Wie man in Abbildung 7 sieht, ist das Riskieren einer roten Karte mit nachfolgendem Elfmeter, bei hoher Torchance der Gegner, statistisch gesehen ab der 51. Spielminute am besten.

[24] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, 2009, S. 15ff.

Fall 2: *Foul mit roter Karte ohne nachfolgenden Elfmeter bei derzeitigem Unentschieden:*

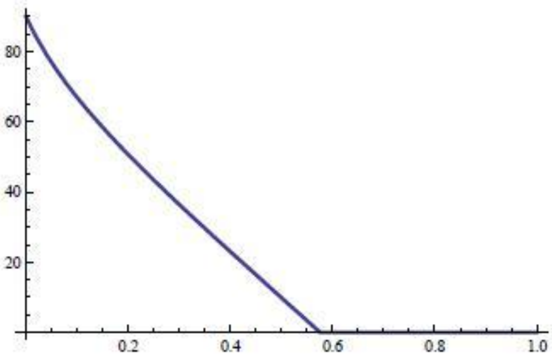

Abbildung 8: Darstellung der optimalen Zeit für ein Foul mit roter Karte ohne anschließenden Elfmeter, in Abhängigkeit von der gegnerischen Torwahrscheinlichkeit, bei momentanem Unentschieden.

Wenn die rote Karte keinen Elfmeter zur Folge hat, sollte der Spieler im Gegensatz zu Fall 2 ein solches Foul sogar noch früher im Spiel riskieren, wie in Abbildung 8 gezeigt. Beträgt die derzeitige Torchance der Gegner mindestens 57,5 %, dann sollte eine Torgelegenheit von der ersten Spielminute an verhindert werden. Bei einer gegnerischen Torwahrscheinlichkeit von weniger als 57,5 % kommt die optimale Zeit für ein Foul, das mit einer roten Karte bestraft wird, erst später im Spiel, d.h. je geringer die Torwahrscheinlichkeit, desto mehr Spielzeit muss vergehen, bis ein solches Foul in Kauf genommen werden sollte, um ein Tor zu verhindern.

Fall 3: *Das derzeit mit einem Tor führende Team riskiert ein Foul mit roter Karte und nachfolgendem Elfmeter:*

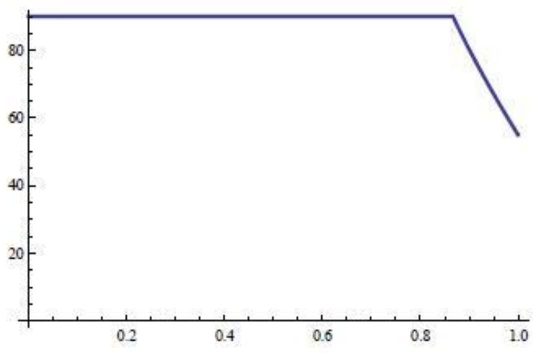

Abbildung 9: Darstellung der optimalen Zeit für ein Foul mit roter Karte und anschließendem Elfmeter, in Abhängigkeit von der gegnerischen Torwahrscheinlichkeit, wenn das foulende Team mit einem Tor führt.

Wie in Abbildung 9 zu erkennen, ist es in diesem Fall ungünstig, ein derartiges Foul zu begehen, solange das Führungstor eine gewisse Sicherheit auf einen Sieg bietet. Statistisch gesehen sollte das Team bei einer Torwahrscheinlichkeit der Gegner von weniger als 86,6 % das

Spiel laufen lassen. Wenn die Chance auf ein Tor allerdings annähernd 100 % beträgt, ist das Foulen des angreifenden Spielers irgendwann ab der 55. Minute die günstigsten Variante.

Fall 4: *Das derzeit mit einem Tor führende Team riskiert ein Foul mit roter Karte ohne nachfolgenden Elfmeter:*

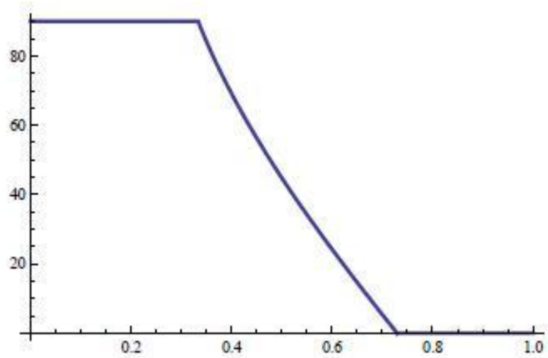

Abbildung 10: Darstellung der optimalen Zeit für ein Foul mit roter Karte ohne anschließenden Elfmeter, in Abhängigkeit von der gegnerischen Torwahrscheinlichkeit, wenn das foulende Team mit einem Tor führt.

Fall 4 zeigt in Abbildung 10 Folgendes: Falls mit weniger als 33,4 % Wahrscheinlichkeit ein Tor für die Gegner fällt und das Foul nicht zu einem Elfmeter führt, sollte die Mannschaft das Spiel laufen lassen. Wenn allerdings die gegnerische Torwahrscheinlichkeit bei über 73 % liegt, dann sollte ein ausgleichendes Tor von Spielbeginn an verhindert werden, auch wenn mit solch einem Foul die Suspendierung eines Spielers droht.

Fall 5: *Das derzeit mit einem Tor im Rückstand liegende Team riskiert ein Foul mit roter Karte und nachfolgendem Elfmeter:*

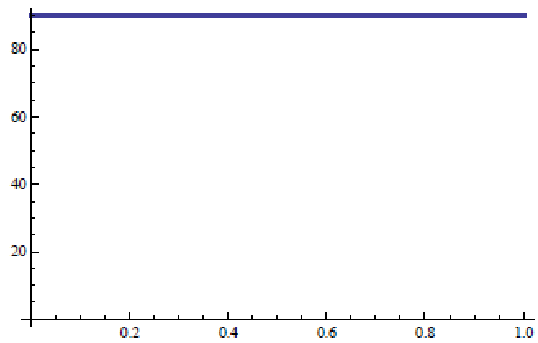

Abbildung 11: Darstellung der optimalen Zeit eine rote Karte mit anschließendem Elfmeter zu riskieren, in Abhängigkeit von der gegnerischen Torwahrscheinlichkeit, wenn das foulende Team mit einem Tor im Rückstand liegt.

Wenn ein Team mit einem Tor im Rückstand liegt, sollte es niemals riskieren, durch ein Foul einen Spieler zu verlieren und dabei auch noch einen Elfmeter zu kassieren. Wie man in Abbildung 11 sieht, wäre die einzig optimale Zeit für solch ein Foul (wenn überhaupt) am Ende des Spiels, unabhängig davon wie hoch die momentane Torwahrscheinlichkeit für die Gegner ist.

Fall 6: *Das derzeit mit einem Tor im Rückstand liegende Team riskiert ein Foul mit roter Karte ohne nachfolgenden Elfmeter:*

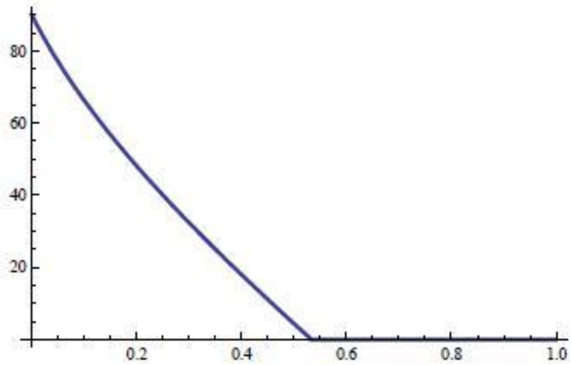

Abbildung 12: Darstellung der optimalen Zeit für ein Foul mit roter Karte ohne anschließenden Elfmeter, in Abhängigkeit von der gegnerischen Torwahrscheinlichkeit, wenn das foulende Team mit einem Tor im Rückstand liegt.

Im letzten, in Abbildung 12 gezeigten Fall liegt die Mannschaft, die das Foul begeht, mit einem Tor im Rückstand, riskiert aber dabei bei einer roten Karte keinen Elfmeter. Also kann sie ein Foul begehen, um kein Gegentor zu kassieren. Damit ergibt sich eine größere Chance, noch auszugleichen, da der Gegner seinen Vorsprung nicht noch um ein weiteres Tor ausbauen kann. Wenn hierbei die Torwahrscheinlichkeit des gegnerischen Teams mindestens 53,2 % beträgt, ist es günstig, die Torgelegenheiten der Gegner vom ersten Spielmoment an zu verhindern. Mit weniger als 53,2 % ist der optimale Zeitpunkt, eine Torgelegenheit zu verhindern, erst dementsprechend später im Spiel. Je geringer die Wahrscheinlichkeit für ein gegnerisches Tor ist, desto später sollte das Foul im Spiel begangen werden.

6. Zusammenfassung und Abschlussdiskussion

Um den Lesern einen schnellen Überblick über Inhalt, statistische Methodik und Ergebnisse dieser Seminararbeit zu geben, werden zum Schluss nochmals die wichtigsten Punkte zusammengefasst. Außerdem wird neben einer Diskussion des vorhandenen Papers, hinsichtlich der Umsetzung der statistischen Methodik, der Darstellungsweise und seines Inhalts, ein Ausblick über weitere statistische Untersuchungen im Fußball gegeben.

6.1 Fazit der statistischen Analyse

Die Verfasser des Papers haben eine ganz neue Methode angewandt, um den Einfluss der roten Karte auf die Trefferquoten in einem Fußballspiel zu schätzen, indem sie Wettquoten analysierten. Beim Schätzen der Trefferquoten aus den Wettquoten kamen verschiedene statistische Methoden zum Einsatz. Diese Studie ergab, dass die Trefferquote des Teams, das eine rote Karte erhalten hat, um ca. 2/3 gesunken ist. Im Gegensatz dazu hat sich die Trefferquote der Gegner um etwa 5/4 vergrößert.

Diese Erkenntnis wirkt sich natürlich auch auf die insgesamt fallenden Tore im Spiel aus, d.h. die Anzahl der fallenden Tore sinkt, wenn ein stärkeres oder ein vergleichbares Team bestraft wird und sie steigt oder bleibt gleich, wenn ein schwächeres Team von einer roten Karte betroffen ist.

Es wurde auch gezeigt, wann es eventuell optimal sein könnte, eine Torchance für die Gegner in Erwartung der Konsequenzen (rote Karte mit oder ohne Elfmeter) zu verhindern. Der optimale Zeitpunkt ist immer abhängig vom derzeitigen Spielstand. Wenn die Mannschaft mit einem Tor in Führung liegt, ist sie weniger geneigt, ein Foul mit einer anschließenden roten Karte zu riskieren, als wenn es zu der Zeit Unentschieden steht. Liegt das Team mit einem Tor im Rückstand, hält es sich mit dem Foulen eher zurück, wenn es dabei eine rote Karte mit einem Elfmeter geben würde. Hat die rote Karte jedoch keinen Elfmeter zur Folge, greift das Team aggressiver in den Spielverlauf ein.

6.2 Diskussion des Papers

Das Paper analysiert eine interessante Thematik und präsentiert die Ergebnisse auf eine zusammenfassende und auf das Wesentliche beschränkte Weise. Doch neben positiven Aspekten gibt es auch ein paar negative Dinge anzumerken.

6.2.1 Fehlerhafte Umsetzung der statistischen Methodik

Bei der Anfertigung der Seminararbeit sind einem im vorliegenden Paper einige Schwächen aufgefallen. Einer der Mängel liegt in der Umsetzung der statistischen Methodik. Zwei der Formeln für die theoretischen Wahrscheinlichkeiten sind fehlerhaft, was das Verständnis des

Ausdrucks zunächst erschwert hat. Gemeint sind zwei Vorzeichenfehler in den Fällen „Win Team 1“ und „Win Team 2“[25].

6.2.2 Ungenaue Darstellungsweise der Grafiken

Die zweite Schwäche liegt in der Anfertigung der Grafiken. Keine der im Paper vorliegenden Abbildungen hat Achsenbeschriftungen und die meisten haben auch keine Legenden, wodurch man sich erst ziemlich genau mit dem dazugehörigen Text beschäftigen muss, um deren Aussagen richtig zu begreifen.

6.2.3 Inhalt

Neben den statistischen Schwächen ist im Paper noch ein wichtiger inhaltlicher Aspekt zu diskutieren.

Die Analyse eines optimalen Spielzeitpunkts, zu dem es sinnvoll ist, eine rote Karte zu riskieren um das Spiel vielleicht noch zu gewinnen oder ein Unentschieden zu erzielen, ist zwar interessant, doch nur hinsichtlich des Ausgangs des momentanen Spiels. Es wird nämlich nicht erwähnt, dass der suspendierte Spieler trotz erzieltem Sieg seiner Mannschaft im nächsten Spiel fehlen wird. Je nachdem, um was für ein Spiel es sich handelt, kann das für die betroffene Mannschaft Folgen in Bezug auf die Trefferquoten im nächsten Spiel und somit auch auf das Endergebnis haben. Es könnte sich dabei um einen für die Mannschaft entscheidenden Spieler handeln. Einen solchen Fall gab es im Halbfinale der WM 2002, als der für die deutsche Nationalmannschaft spielende Michael Ballack mit einem taktischen Foul eine große Torchance der Gastgeber verhinderte. Dafür nahm er die zweite Gelbe Karte im Spiel in Kauf und war damit für das Finale gesperrt.

6.2.4 Fußball-Wettskandal

Um nochmal kurz auf die Wettquoten, die für die Datenerhebung verwendet wurden zurückzukommen, ist ein aktueller Bericht über einen neuen Wettskandal im internationalen Fußball, der seit Donnerstag den 19.11.09 in den Medien ist, zu erwähnen. Hierbei sollen ca. 200 Spiele unter Manipulationsverdacht stehen, darunter sogar mehr als 30 Spiele in

[25] Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, S. 5.

Deutschland. Der Wettmarkt wird durch kriminelle Handlungen missbraucht, indem hohe Geldbeträge gesetzt werden und durch Bestechung oder Erpressung von Spielern und Schiedsrichtern mit hohen Summen ein Spiel für einen gewünschten Spielausgang manipuliert wird. Dadurch wird deutlich, wie groß die Bedeutung der Wettquoten auf den Wettmärkten ist.

6.3 Ausblick auf weitere statistische Untersuchungsmöglichkeiten im Fußball

Im Ausblick werden nun ein paar der weiteren möglichen Ideen genannt, diese Sportart statistisch zu untersuchen.

Die Bundesliga[26] bietet anhand von vorliegenden Daten genügend Möglichkeiten, Auswertungen durchzuführen und Statistiken aufzustellen. Hat man eine ausreichend große Grundgesamtheit an Spieltagen zur Verfügung, könnte man sich beispielsweise mit der Frage beschäftigen, ob eine Mannschaft mehr Tore schießt, wenn sie auswärts spielt oder den Heimvorteil hat oder ob man einen Trend erkennen könnte, zu welchem Spielzeitpunkt[27] die meisten Tore fallen. Anhand von Spielergebnissen aus den bisherigen Bundesligasaisonen könnte zudem noch das am häufigsten vorkommende Spielergebnis ermittelt werden.

Als weitere Idee sei die Analyse eines Trainerwechsels[28] in Vereinen genannt. Die Frage, ob nach einem Trainerwechsel wirklich eine Verbesserung in der Leistungsfähigkeit der Mannschaft erfolgt, könnte mithilfe von statistischen Untersuchungen analysiert werden.

Interessant wäre auch die Auswirkung einer roten Karte im Frauen-Fußball mit denen der Männer zu vergleichen. Vorrausetzung hierfür ist, dass im Frauenfußball genügend rote Karten gezeigt werden, damit diese statistische Analyse überhaupt sinnvoll ist.

[26] http://www.fussballstatistiken.de/index.php3?language=german&id1=1&id2=21&id3=1.Bundesliga. (Aufgerufen am: 24.11.2009).

[27] http://ballbesitz.wordpress.com/2008/02/11/wann-fallt-es-denn-das-tor/. (Aufgerufen am: 24.11.2009).

[28] http://www.diplom.de/Diplomarbeit-9526/Auswirkungen_von_Trainerwechseln_auf_den_sportlichen_Erfolg_in_der_Fussball-Bundesliga.html. (Aufgerufen am: 24.11.2009).

7. Literaturverzeichnis

Einzelveröffentlichungen:

- Bar-Eli, M., G. Tenenbaum, S. Geister, "Consequences of Players' Dismissal in Professional Soccer: A Crisis Related Analysis of Group Size Effect," *Journal of Sport Sciences*, 1083-1094, 2006. [4]

- Der Brockhaus-In einem Band, F.A. Brockhaus GmbH, Leipzig 2003, 10. Auflage. [1] [3]

- Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, Statistik Der Weg zur Datenanalyse, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, 6. Auflage. [8] [9] [15] [16] [17]

- Forsythe, R., F. Nelson, G. R. Neumann, J. Wright, "Anatomy of an Experimental Political Stock Market," *The American Economic Review*, Vol. 82, No. 5, 1142-1161, 1992. [4]

- Jan Vecer, Frantisek Kopriva, Tomoyuki Ichiba, Journal of Quantitative Analysis in Sports – Estimating the Effect of the Red Card in Soccer: When to Commit an Offense in Exchange for Preventing a Goal Opportunity, The Berkeley Electronic Press, 2009. [7] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25]

- Ludwig Fahrmeir, Thomas Kneib, Stefan Lang, Regression, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, 2009, 2. Auflage. [10] [11]

- Olle Häggström, Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006. [12] [13] [14]

- Ridder, G., J. S. Cramer, P. Hopstaken, "Down to Ten: Estimating the Effect of a Red Card in Soccer," *JASA,* Vol. 89, No. 427, 1994. [4]

Internetseiten:

- http://members.chello.at. Karten Fußballregeln.
  Unter: http://members.chello.at/hhofer/fussball_regeln-gelbe_karte-rote_karte-karten.htm.
  Aufgerufen am: 26.11.2009. [2]

- http://www.betfair.com/. Betfair.
  Unter: http://www.betfair.com/de/aboutUs/#Commission.
  Aufgerufen am: 26.11.2009. [5]

- http://www.wettstern.com. Wettquoten berechnen.
  Unter: http://www.wettstern.com/wettquoten-berechnen.
  Aufgerufen am: 18.11.2009. [6]

- http://www.wettstern.com. Faire Quoten vs. Buchmacherquoten.
  Unter: http://www.wettstern.com/wettanbieter-know-how/buchmacherquoten.
  Aufgerufen am: 20.11.2009. [18]

- http://www.fussballstatistiken.de/. Europa Fußball Statistik.
  Unter:
  http://www.fussballstatistiken.de/index.php3?language=german&id1=1&id2=21&id3=1.Bundesliga.
  Aufgerufen am: 24.11.2009. [26]

- http://ballbesitz.wordpress.com/. Wann fällt es denn, das Tor?
  Unter: http://ballbesitz.wordpress.com/2008/02/11/wann-fallt-es-denn-das-tor/.
  Aufgerufen am: 24.11.2009. [27]

- http://www.diplom.de/. Auswirkungen von Trainerwechseln auf den sportlichen Erfolg in der Fußball-Bundesliga.
  Unter: http://www.diplom.de/Diplomarbeit-9526/Auswirkungen_von_Trainerwechseln_auf_den_sportlichen_Erfolg_in_der_Fussball-Bundesliga.html.
  Aufgerufen am: 24.11.2009. [28]