Estimating the Effect of the Red Card in Soccer:

When to Commit an Offense in Exchange for Preventing a Goal Opportunity

- angefertigt von: Julia Kammerer
- Betreuer: Sebastian Kaiser
- Datum: 5. 12. 2009

Gliederung

1. Einleitung
1.1 Spielidee

- 2 Mannschaften (10 Feldspieler, 1 Torwart)
- Tore schießen und gegnerische Tore verhindern
- **Sieg**: mehr Tore als Gegner erzielen
- pro Team und Spiel maximal 3 Auswechslungen
- reguläre Spielzeit: 2x45 Minuten
- Halbzeitpause: 15 Minuten
- Spielleitung: 1 Schiedsrichter + 2 Linienrichter

1. Einleitung
1.2 Wichtigste Grundregeln

- Ballannahme und Ballspiel
  → unterschiedliche Regeln für Feldspieler und Torwart
- Anstoß am Mittelkreis
- **Tor**: Ball überschreitet Torlinie
- Ball über Seitenlinie ins Aus → Einwurf für Gegner
- Ball über Torlinie ins Aus
  → Abstoß vom Tor (Gegner zuletzt am Ball)
  → Eckball für Gegner (eigener Spieler zuletzt am Ball)

1. Einleitung
1.2 Wichtigste Grundregeln

- **Freistoß ohne Karte** (leichtes Foul)
- **Elfmeter** (Handspiel, Foul an Stürmer)
- **Gelbe Karte** (Spielverzögerung, „Schwalbe“)
- **Gelb-Rote Karte**
- **Rote Karte** (Foul von hinten, taktische Fouls, Beleidigungen, absichtliches Handspiel)
- **Folge der roten Karte**: Spielen in Unterzahl

2. Problemstellung

- Hat eine rote Karte Auswirkungen auf die Trefferquoten und das Endergebnis?
- Ist es sinnvoll eine rote Karte (mit oder ohne Elfmeter) in Kauf zu nehmen, wenn dabei eine Torchance der Gegner verhindert wird?
- Datenwahl: Wettquoten der WM 2006 und EM 2008

3. Der „In-Play-Wettmarkt“

- eigene Wahl der Wettquoten
- **AUF** und **GEGEN** Ereignisse wetten
- Abschluss der Wetten vor und während dem Spiel
- Einfluss von roten Karten und Toren auf Wetteinsätze
- Verfall der Wetten nach Spielzeit
- Wetteinsätze als Wettquoten der Form 1:x
- $$\text{Eintrittswahrscheinlichkeit} = \left(\frac{1}{\text{Wettquote}}\right)$$

3. Der „In-Play-Wettmarkt“
3.1 „Back“ & „Lay“

- **„Back“**
  - Wettquote x^{back}
  - Einsatz: 1€
  - Gewinn: (x^{back} -1)€
  - Verlust: 1€
- **„Lay“**
  - Wettquote x^{lay}
  - Einsatz: (x^{lay} -1)€
  - Gewinn: 1€
  - Verlust: (x^{lay} -1)€

$$x^{back} < x^{lay}$$

→ „Lay“: mehr Einsatz (größere Gewinnchance)
→ „Back“: weniger Einsatz (geringere Gewinnchance)

3. Der „In-Play-Wettmarkt“
3.2 Einfluss der roten Karte

Bsp: Italien vs. Australien

Contract	Before RC Back	Before RC Lay	After RC Back	After RC Lay
Italy	1.87	1.88	2.68	2.70
Australia	8.40	8.60	4.40	4.90
The Draw	2.78	2.80	2.42	2.44
Italy Next Goal	1.82	1.83	2.50	3.00
Australia Next Goal	6.40	7.00	3.55	4.20
No Goal	3.20	3.30	2.84	2.98
Three or More Goals	6.80	7.20	6.00	11.00

- Handel auf dem Wettmarkt wird gestoppt
- rote Karte für Italien (50.)
- Änderung der Wettquoten

→ Veränderung der Wahrscheinlichkeiten

→ davor: (0,532, 0,535)

→ danach: (0,370, 0,373)

4. Erläuterung: Statistische Methodik
4.1 Poisson-Verteilung

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & x \in \{0,1,\dots\} \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- diskrete Verteilung
- **X**: Anzahl der Ereignisse in einem Zeitintervall
- **λ**: erwartete Anzahl an Ereignissen (λ>0)

4. Erläuterung: Statistische Methodik
4.2 Regressionsanalyse

- **lineare Einfachregression**:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

- gerichteter linearer Zusammenhang
- **Ziel**: Einfluss der erklärenden Variable/n X auf Zielgröße Y untersuchen
- Prognosen mit Regressionsgeraden
- Bestimmtheitsmaß R^2: Güte des Modells ([0,1])

4. Erläuterung: Statistische Methodik
4.3 Minimax-Schätzung

- **Minimax-Satz**

→ Minimalprinzip & Maximalprinzip

- **Zweipersonen-Nullsummenspiele**

→ jeder kann nur den Einsatz des jeweils anderen gewinnen (Nullgewinn)

→ Minimierung der gegnerischen Auszahlung

→ Maximierung des eigenen Gewinns

4. Erläuterung: Statistische Methodik
4.4 Kleinste-Quadrate-Schätzung

- **Verwendung**: Berechnung der Ausgleichsgeraden

$$f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

- **Ziel**: Abweichung der Datenpunkte möglichst klein

4. Erläuterung: Statistische Methodik
4.4 Kleinste-Quadrate-Schätzung

- **Prinzip**: Schätzer für $\boldsymbol{\beta}_0$ und $\boldsymbol{\beta}_1$ durch

(1) Minimierung der Summe der quadratischen Abweichungen berechnen

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 \rightarrow \min_{\beta_0, \beta_1}$$

→ Quadrieren verhindert gegenseitiges Aufheben von positiven und negativen Abweichungen

4. Erläuterung: Statistische Methodik
4.4 Kleinste-Quadrate-Schätzung

(2) Minimierung der Summe der Beträge der Abweichungen

$$\sum_{i=1}^{n} |Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)| \rightarrow \min_{\beta_0, \beta_1}$$

→ Beträge verhindern gegenseitiges Aufheben von positiven und negativen Abweichungen

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.1 Theoretische Wahrscheinlichkeit

- **Team 1 gewinnt**

$$= \mathbb{P}(X_T > Y_T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_T = k + X_t, Y_T < k + X_t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-\lambda_t} \frac{{\lambda_t}^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k+X_t-Y_t-1} e^{-\mu_t} \frac{{\mu_t}^i}{i!} \right]$$

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.1 Theoretische Wahrscheinlichkeit

- **Unentschieden**

$$= \mathbb{P}(X_T = Y_T)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{-(\lambda_t+\mu_t)} \cdot \frac{\lambda_t^{(k+\max(X_t,Y_t)-X_t)}}{(k+\max(X_t,Y_t)-X_t)!} \cdot \frac{\mu_t^{(k+\max(X_t,Y_t)-Y_t)}}{(k+\max(X_t,Y_t)-Y_t)!}\right]$$

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.1 Theoretische Wahrscheinlichkeit

- **Kein Tor mehr**

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{-\lambda_t}\frac{\lambda_t^{\,k}}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k+X_t-Y_t-1} e^{-\mu_t}\frac{\mu_t^{\,i}}{i!}\right]$$

$$e^{-\lambda_t} \cdot \frac{\lambda_t^{\,0}}{0!} \cdot e^{-\mu_t} \cdot \frac{\mu_t^{\,0}}{0!} = e^{-\lambda_t} \cdot 1 \cdot e^{-\mu_t} \cdot 1 = e^{-\lambda_t} \cdot e^{-\mu_t}$$

$$= e^{-(\lambda_t+\mu_t)}$$

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.2 Faires Wetten

- **Voraussetzung für Schätzung der Trefferquoten**
- nie faire Wettquoten → Profit

  → faire Wettquoten würden genau theoretischen Wahrscheinlichkeiten entsprechen
- Gewinn bei „Back“: $x^{back} \cdot p - 1$
- Gewinn bei „Lay“: $\frac{x^{lay}}{x^{lay}-1} \cdot (1-p) - 1$

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.3 Schätzung der Trefferquoten

(1) Minimax-Schätzung

$$\min_{\lambda_t,\mu_t}\max_i\left(x_i^{back} \cdot \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) - 1;\quad \frac{x_i^{lay}}{x_i^{lay}-1} \cdot (1-\mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t)) - 1\right)$$

- Trefferquoten λ_t und μ_t aus den Wettquoten schätzen
- Optimale Wahl $\hat{\lambda}_t$ und $\hat{\mu}_t$

  → bestmöglichen Gewinn minimieren

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.3 Schätzung der Trefferquoten

Bsp.:

Contract	$1/x^{lay}$	$1/x^{back}$	$\mathbb{P}_i(\hat{\lambda}_t, \hat{\mu}_t)$	Return Back	Return Lay
Italy	0.532	0.535	0.534	-0.002	-0.004
Australia	0.116	0.119	0.099	-0.171	**0.020**
The Draw	0.357	0.360	0.367	**0.022**	-0.016
Italy Next Goal	0.546	0.549	0.560	**0.020**	-0.031
Australia Next Goal	0.143	0.156	0.152	-0.030	-0.010
No Goal	0.303	0.313	0.288	-0.079	**0.022**
Three or More Goals	0.139	0.147	0.130	-0.113	**0.010**

- Trefferquoten vor roter Karte
  → Italien $\hat{\lambda}_t$ = 0,980, Australien $\hat{\mu}_t$ = 0,265
- Trefferquote nach roter Karte
  → Italien $\hat{\lambda}_t$ = 0,677, Australien: $\hat{\mu}_t$ = 0,477

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.3 Schätzung der Trefferquoten

(2) Kleinste-Quadrate-Schätzer (L²)

$$\min_{\lambda_t,\mu_t} \sum_i \left[\left(\frac{1}{x_i^{back}} - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) \right)^2 + \left(\frac{1}{x_i^{lay}} - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) \right)^2 \right]$$

→ Italien: $\hat{\lambda}_t^2$ = 0,959, Australien: $\hat{\mu}_t^2$ = 0,265

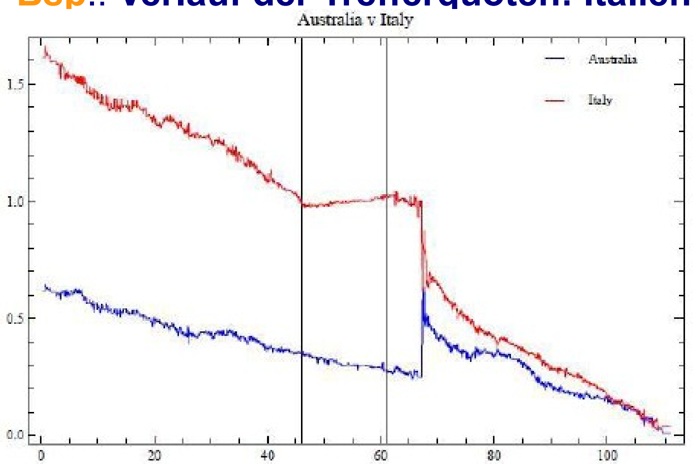
(3) Kleinste-Quadrate-Schätzer (L¹)

$$\min_{\lambda_t,\mu_t} \sum_i \left[\left| \frac{1}{x_i^{back}} - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) \right| + \left| \frac{1}{x_i^{lay}} - \mathbb{P}_i(\lambda_t,\mu_t) \right| \right]$$

→ Italien $\hat{\lambda}_t^1$ = 0,948, Australien: $\hat{\mu}_t^1$ = 0,263

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.3 Schätzung der Trefferquoten

Bsp.: Verlauf der Trefferquoten: Italien vs. Australien



Trefferquoten:

0,980 → 0,677

0,265 → 0,477

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.4 Auswirkung einer roten Karte

- Regressionsanalysen:
  - bestraftes Team:

Trefferquote nach roter Karte

Unterschied in den Trefferquoten

$$\lambda^{new} = \theta_1 \cdot \lambda^{old} + \epsilon_1$$

Fehlerterm

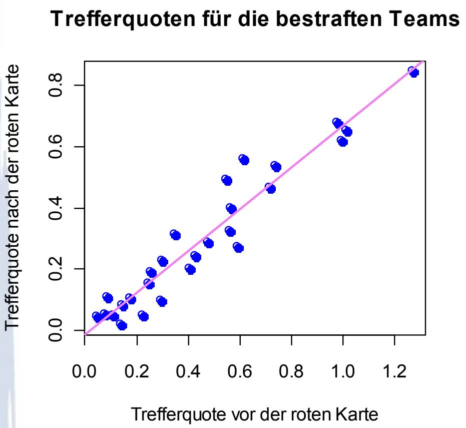
Trefferquote vor roter Karte

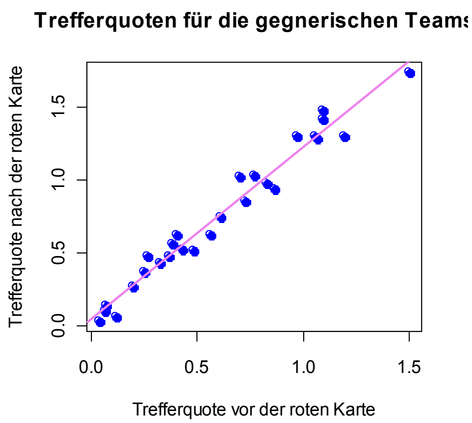
  - gegnerisches Team:

$$\mu^{new} = \theta_2 \cdot \mu^{old} + \epsilon_2$$

$$\longrightarrow \hat{\theta}_1 = 0{,}663 \approx \frac{2}{3}, \quad \hat{\theta}_2 = 1{,}237 \approx \frac{5}{4}$$

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.4 Auswirkung einer roten Karte





⟶ $R^2 = 0{,}972$ ⟶ $R^2 = 0{,}991$

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.5 Erwartete Anzahl an Toren

- Gesamttrefferquote: $\lambda^{new} + \mu^{new} \geq \lambda^{old} + \mu^{old}$
- Es gilt: $\lambda^{new} \approx \frac{2}{3}\lambda^{old}$ und $\mu^{new} \approx \frac{5}{4}\mu^{old}$
- Gleichung erfüllt wenn: $\mu^{old} \geq \frac{4}{3}\lambda^{old}$

→ rote Karte für schwächeres Team: Gesamttrefferquote steigt oder bleibt gleich

→ rote Karte für stärkeres oder vergleichbares Team: Gesamttrefferquote sinkt

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.6 Rote Karte oder Tor

Allgemeine Situation

- kurz vor Spielende (Unentschieden)

  → fast sicheres Tor verhindern (rote Karte + Elfmeter)
- noch genügend Spielzeit (Spielbeginn)

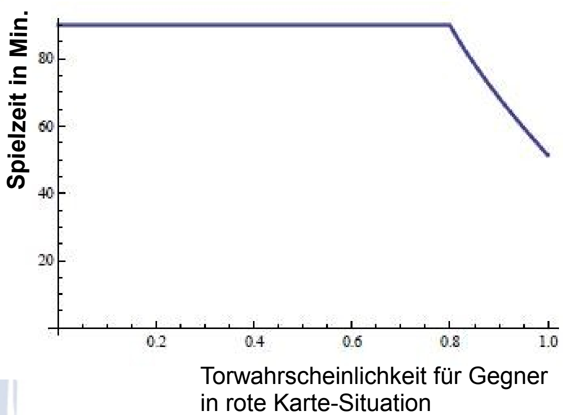
  → kein Foul mit roter Karte (+ Elfmeter)

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.6 Rote Karte oder Tor

- **optimaler Zeitpunkt**
  - momentaner Spielstand
  - momentane Torwahrscheinlichkeit der Gegner
- **2 Situationen:** rote Karte mit oder ohne Elfmeter
- **Voraussetzungen**:
  - vergleichbare Mannschaftsniveaus
  - durchschnittliche Trefferquote von 1,1
  - Erfolgsrate für Elfmeter von 80 %

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.6 Rote Karte oder Tor

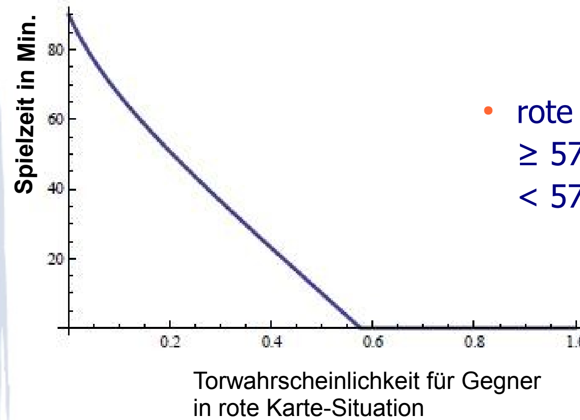
Fall 1: Unentschieden: Rote Karte + Elfmeter



- Spiel laufen lassen:
  < 80 %
- rote Karte + Elfmeter:
  ≤ 100 %, ab 51. Min.

5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.6 Rote Karte oder Tor

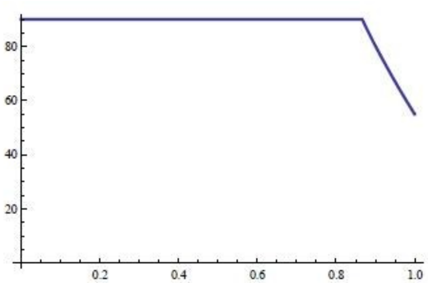
Fall 2: Unentschieden: Rote Karte



- rote Karte:
  ≥ 57,5 %, ab 1. Minute
  < 57,5 %, zunehmend später

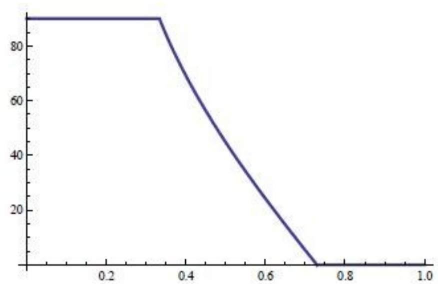
5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.6 Rote Karte oder Tor

Fall 3: 1 Tor Vorsprung:
Rote Karte + Elfmeter



- Spiel laufen lassen: < 86,6 %
- rote Karte + Elfmeter:
  ≤ 100 %, ab 55. Minute

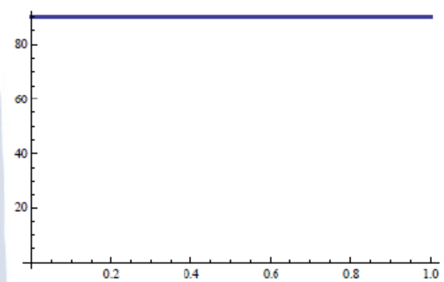
Fall 4: 1 Tor Vorsprung:
Rote Karte



- Spiel laufen lassen: < 33,4 %
- rote Karte:
  > 73 %, ab 1. Minute

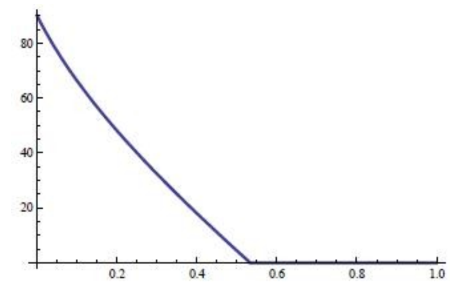
5. Umsetzung: Statistische Methodik
5.6 Rote Karte oder Tor

Fall 5: 1 Tor Rückstand:
Rote Karte + Elfmeter



- Spiel immer laufen lassen

Fall 6: 1 Tor Rückstand:
Rote Karte



- rote Karte:
  ≥ 53,2 %, ab 1. Minute
  < 53,2 %, zunehmend später

6. Fazit/Diskussion/Ausblick
6.1 Fazit

(1) Trefferquote nach roter Karte

- bestraftes Team: Rückgang um ca. 2/3
- Gegnerisches Team: Zunahme um ca. 5/4

(2) Gesamttrefferquote nach roter Karte für

- stärkeres oder vergleichbares Team: Abnahme
- schwächeres Team: keine Änderung oder Anstieg

(3) opt. Zeit für Rote Karte (mit oder ohne Elfmeter)

→ abhängig vom Spielstand

6. Fazit/Diskussion/Ausblick
6.2 Diskussion zum Paper

- fehlerhafte Formeln
- fehlende Achsenbeschriftungen bei den Grafiken
- Die Auswirkungen der roten Karte werden nur für das aktuelle Spiel berücksichtigt

6. Fazit/Diskussion/Ausblick
6.3 Ausblick

- **Weitere Möglichkeiten einer stat. Auswertung**
  - Tore bei Heim- und Auswärtsspielen
  - Verteilung der Tore über die Spielzeit
  - Auswirkungen eines Trainerwechsels
  - Vergleich der Auswirkungen einer roten Karte zwischen Frauen- und Männerfußball
- **Aktueller Wettskandal**