

Ultimate 100 M World Records Through Extreme-Value Theory

Seminar: Statistik im Sport



stud. Stat. Florian Wickler

Institut für Statistik

Ludwig-Maximilians-Universität München

1. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Problemstellung | 1 |
| 2 | Der 100-Meter-Lauf und seine Ergebnisse | 2 |
| 2.1 | 100 Meter bis zum Ziel | 2 |
| 2.2 | Die Daten | 4 |
| 3 | Extremwerttheorie | 5 |
| 3.1 | Grundlagen | 6 |
| 3.2 | Schätzer für γ und x^* | 9 |
| 3.3 | Bestimmung des optimalen Schwellenwerts k | 11 |
| 4 | Ergebnisse | 13 |
| 4.1 | Überprüfung der Extremwertbedingung | 14 |
| 4.2 | Schätzung von γ und Auswahl des Schwellenwerts | 14 |
| 4.3 | Schätzung des absoluten Weltrekords | 17 |
| 5 | Abschließende Bemerkungen | 19 |
| 5.1 | Vergleich zu ähnlichen Berechnungen | 19 |
| 5.2 | Diskussion der Methode | 21 |

1 Problemstellung

Die Extremwerttheorie beschäftigt sich mit statistischen Problemen, die das äußerste Ende einer Wahrscheinlichkeitsverteilung betreffen. Sie stellt dazu mathematische Werkzeuge zur semi-parametrischen Inferenz, insbesondere zur Schätzung des Endpunkts aus der zugrunde liegenden Verteilung zur Verfügung. Diese statistischen Verfahren haben viele Anwendungen, z.B. in der Hydrologie (Vorbeugung von Flutkatastrophen), dem Finanz- und Versicherungswesen, der Meteorologie sowie dem Ingenieurwesen.

In dieser Arbeit richten wir den Blick auf einen der populärsten Wettkämpfe der Leichtathletik: den 100-Meter-Lauf, sowohl für Männer als auch für Frauen. Grundlage dieser Arbeit ist das Paper „*ULTIMATE 100M WORLD RECORDS THROUGH EXTREME-VALUE THEORY*“ ([Einmahl and Smeets, 2009]) des Statistikprofessors John Einmahl und dem ehemaligen Studenten Sander Smeets von der Tilburg Universität in den Niederlanden. Alle Ergebnisse und Abbildungen entstammen diesem Paper, soweit nicht anders gekennzeichnet.

Wir möchten herausfinden: Wie schnell kann der Mensch laufen? Wir interessieren uns, in anderen Worten, für den absoluten Weltrekord. Die meisten Forschungsarbeiten zur Untersuchung absoluter Weltrekorde betrachten die Entwicklung des Weltrekords über die Zeit und berechnen daraus einen Trend für die Zukunft. Diese Ansätze benutzen lediglich eine beschränkte Anzahl an ehemaligen Weltrekorden und erhalten deshalb instabile Schätzer. Der Ansatz von [Einmahl and Smeets, 2009] dagegen, basiert auf der persönlichen Bestzeit von so vielen Spitzenathleten wie möglich. Der geschätzte absolute Weltrekord gibt als Folge davon an, was „morgen“ erreicht werden kann, nicht was in 500 Jahren passiert. Herkömmliche Ansätze sagen gewöhnlich nichts darüber aus, was in naher Zukunft geschehen wird. Der Ansatz dieser Arbeit ist der gleiche wie in [Einmahl and Magnus, 2008]. Die Autoren benutzen in dieser Neuauflage jedoch raffiniertere Methoden, um den absoluten Weltrekord zu schätzen. Außerdem sind die Daten, auf denen die Schätzungen basieren, aktueller und Zeiten von vor 1991 (seit 1991 gibt es offizielle Dopingkontrollen) wurden ausgeschlossen, um so wenig dopingbehaftete Leistungen wie möglich aufzunehmen.

Das Ende, also der Ausläufer, einer Verteilung hängt ganz entscheidend vom so genannten Extremwertindex ab. Es existieren viele gute Schätzer für diesen Index, die alle von einem Parameter (k) abhängen. Dieser Parameter gibt an, wie viele der schnellsten Läufer einen Einfluss auf den Weltrekord haben. Eine zu geringe Anzahl, also nur die absolute Weltspitze, führt zu großer Varianz, eine zu große Anzahl an Athleten dagegen erhöht den Fehler.

Um einen geeigneten Wert für k zu bestimmen, wird eine Methode benutzt, die auf der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers basiert.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 wird der 100-Meter-Lauf an sich vorgestellt und auf die genaue Datenerhebung eingegangen. Kapitel 3 gibt eine kurze Einführung in die Extremwerttheorie allgemein, stellt die spezielle Methodik zur Bestimmung des absoluten Weltrekords dar und diskutiert die Wahl eines geeigneten k . Die Ergebnisse von [Einmahl and Smeets, 2009] werden in Kapitel 4 vorgestellt und in Teil 5 mit Resultaten anderer aktueller Arbeiten verglichen. Abschließend wird die statistische Methodik hinterfragt.

2 Der 100-Meter-Lauf und seine Ergebnisse

Anhand der geschichtlichen Entwicklung des 100-Meter-Laufs, soll im Folgenden kurz dargestellt werden, warum der Weltrekord immer besser wird. Wesentliche Regeln werden nebenher erläutert. Die Informationen und Fakten basieren in diesem Teil auf [Pfeil, 2008] und dem internationalen Leichtathletikverband [IAAF].

Die Methodik der Datenerhebung von [Einmahl and Smeets, 2009] wird im zweiten Teil dieses Abschnitts erläutert.

2.1 100 Meter bis zum Ziel

Das kürzeste Rennen der olympischen Sprintwettbewerbe, der 100-Meter-Lauf, offeriert die klarste Darstellung von menschlicher Geschwindigkeit und entwickelte sich so zu einem Flaggschiff der Leichtathletik.

Das Rennen wurde ursprünglich auf einer Gras- oder Aschenbahn über die britische Distanz von 100 Yards (91.44m) durchgeführt, bevor sich der kontinentale Einfluss und damit die 100 Meter durchsetzten. Die Läufer starteten im Stehen bis 1887 Charles H. Sherrill (USA) kleine Vertiefungen für die Füße in die Bahn grub und einen Tiefstart ausprobierte. Eine Technik, die mit ein paar Änderungen, bis heute benutzt wird.

Der Internationale Leichtathletikverband, International Association of Athletic Federations (IAAF), genehmigte den Einsatz von Startblöcken 1937. Ein Jahr später legte man fest, dass kein offizieller Rekord bestätigt wird, ohne genaue Angaben über den Wind. Der maximal erlaubte Rückenwind wurde auf zwei Meter pro Sekunde festgelegt.

Einfachste Experimente, um die Zeit elektronisch beim Sprintwettbewerb zu stoppen, wurden schon in den 1920er Jahren durchgeführt. Die Technologie wurde so deutlich verbessert, dass die IAAF seit 1977 nur noch elektronisch gemessene Zeiten als neuen Weltrekord akzeptiert. Die Zielkamera - seit den Olympischen Spielen 1932 im Einsatz - wurde aufgestellt, um sehr knappe Entscheidungen fair beurteilen zu können. Die heutige Technologie erlaubt es, Unterschiede von bis zu einer tausendstel Sekunde auf einem Zielfoto sichtbar zu machen.

Einen wesentlichen Leistungsfortschritt brachte die Einführung von Laufbahnen mit Kunststoffbelag; der erste 100-Meter-Weltrekord darauf waren die 9.9 Sekunden von Jim Hines (USA) bei den Olympischen Spielen 1968 in Mexiko-Stadt.

Die klimatischen Voraussetzungen spielen eine bedeutende Rolle bei einer so kurzen Distanz. Jim Hines profitierte bei seinem Rekord von einer ganzen Reihe von klimatischen Begünstigungen: trockenes und warmes Wetter, ein geringerer Luftwiderstand (Mexiko-Stadt liegt auf 2240 Metern Höhe) sowie ein Rückenwind von 1.6m/s .

Die Laufbahn selbst hat ebenfalls einen Einfluss auf das Leistungsvermögen. Ein wichtiges Kriterium für eine „langsame“ oder „schnelle“ Laufbahn ist der Grad der Verformung des Untergrunds. Wenn das Trägermaterial härter ist, kann der Läufer seine Kraft besser übertragen. Schnelle, aber harte Laufbahnen haben den Nachteil, dass Muskeln und Knochen stärker beansprucht werden, was zu Verletzungen durch Überbeanspruchung führt.

Um einen Frühstart zu erkennen, werden spezielle Fehlstartkontrollgeräte in den Startblöcken eingesetzt. Ein Frühstart wird angezeigt, falls eine Reaktionszeit unter 0.12 Sekunden gemessen wird. Diese Zeit gibt die natürliche Grenze an, die ein Signal vom Ohr zu den Muskeln braucht.

Pessimisten halten die 100 Meter für „tot“, denn es gibt kein Rennen, dessen Ruf so ruiniert ist. Seit dem Skandal von Ben Johnson in Seoul 1988 gab es nur einen Olympiasieger, der nicht des Dopings verdächtigt wurde. Nur der Kanadier Donovan Bailey, der 1996 in Atlanta gewann, gilt als clean. Von sämtlichen 15 Sprintern, die von 1988 bis 2004 bei Olympia auf dem Treppchen standen, sind überhaupt nur vier unbelastet.

Trotzdem ist das Rennen der Höhepunkt jeder Spiele. Es gibt nichts Größeres bei Olympia als die 100 Meter. Als in Peking der Startschuss fiel, waren weltweit über eine Milliarde Menschen vor dem Fernseher versammelt. Sie wollten einen magischen Moment erleben, und bekamen ihn. Usain Bolt ist Weltrekord gelaufen (9.69s), obwohl er 20 Meter vor dem Ziel schon mit jubeln angefangen hat. Inzwischen liegt der Weltrekord des Jamaikaners bei

9.58 Sekunden und irgendwann wird ein Läufer schneller sprinten als Bolt. Vielleicht läuft Tyson Gay schon im nächsten Jahr 9.55 Sekunden. Danach muss es jemanden geben, der 9.54 Sekunden laufen kann und so weiter.

2.2 Die Daten

Für die zwei Disziplinen, den 100-Meter-Lauf für Frauen und Männer, wurde die persönliche Bestzeit von so vielen Spitzenathleten wie möglich gesammelt. Wesentlich ist, dass jeder Athlet nur mit einer einzigen Zeit, der schnellsten, vertreten ist, unabhängig davon ob sie oder er den Weltrekord mehrmals unterboten hat. Dies gewährleistet die Unabhängigkeit der Daten, welche später noch benötigt wird.

Um dem Dopingmissbrauch entgegenzuwirken begann der internationale Leichtathletikverband im Jahr 1990 damit, Dopingkontrollen im Wettkampf durchzuführen. Um so viele dopingbehaftete Zeiten wie möglich auszuschließen, beginnt der Beobachtungszeitraum erst am 01. Januar 1991 und endet am 19. Juni 2008.

Alle Daten bis 2001 wurden der schwedischen Website http://hem.bredband.net/athletics/athletics_all-time_best.htm entnommen, die alle Bestzeiten der Athleten bis 2001 auflistet. Die neueren Daten bis einschließlich 2008 stammen von acht offiziellen Listen der IAAF (www.iaaf.org), in denen die Zeiten sämtlicher Athleten eines Jahres aufgeführt sind. Es werden im Folgenden nur offiziell anerkannte Zeiten betrachtet (siehe dazu auch Kapitel 2.1).

Die Rohdaten, enthalten in neun Listen (eine für vor 2001 und für jedes Jahr danach eine eigene) wurden zu einer Liste zusammengefügt. Besondere Sorgfalt wurde darauf verwendet, von jedem Athleten genau die schnellste Zeit aufzunehmen um keine „Lücken“ zu bekommen (dies ist nicht so einfach wie es scheint, da Namen oft unterschiedlich geschrieben werden und Athleten manchmal ihren Namen ändern, typischerweise nach der Heirat.).

Einige dieser Bestzeiten sind exakt gleich, da die Ergebnisse nur mit einer Genauigkeit von einer hundertstel Sekunde gemessen wurden. Bei Schätzungen können diese Datencluster Probleme bereiten, deshalb werden diese Daten wie in [Einmahl and Magnus, 2008] geglättet. Wenn m Athleten eine persönliche Bestzeit von 9.85 Sekunden haben, dann werden diese m Zeiten gleichmäßig über das Intervall (9.845, 9.855) nach folgender Funktion verteilt:

$$t_j = 9.845 + 0.01 \frac{2j - 1}{2m}$$

Man hätte die Daten auch zufällig glätten oder ein allgemeineres Glättungsschema verwenden können, die Effekte haben sich allerdings als minimal herausgestellt. Schließlich wurden alle Bestzeiten in Geschwindigkeiten umgerechnet. Höhere Geschwindigkeiten entsprechen „besseren“ Zeiten.

In Tabelle 1 sind der Stichprobenumfang und jeweils die schnellste und langsamste Zeit sowohl für Männer als auch für Frauen dargestellt. Wichtig ist, dass der Weltrekord der Frauen von Florence Griffith-Joyner, 10.49 Sekunden, im Jahr 1988 (vor 1991) aufgestellt wurde und deshalb nicht die schnellste Zeit bei den Frauen ist. Der aktuelle Weltrekord der Männer, 9.58, aus dem Jahr 2009 - aufgestellt von Usain Bolt- wurde ebenfalls nicht berücksichtigt.

| Disziplin | Stichprobenumfang | Bestzeit | langsamste Zeit |
|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 100m Männer | 762 | 9.72s (37.04km/h) | 10.30s (34.95km/h) |
| 100m Frauen | 479 | 10.65s (33.80km/h) | 11.38s (31.63km/h) |

Tabelle 1: Zusammenfassung der Daten.

3 Extremwerttheorie

Rekorde sind ein Phänomen, das den Menschen seit Jahrtausenden interessiert. Wir suchen nach dem schnellsten Mann, der kräftigsten Frau und dem größten Tier genauso wie nach dem längsten Fluss, dem höchsten Berg oder dem tiefsten Meeresgraben. Hinter der Bibel und dem Koran ist das „Guinness-Buch der Rekorde“ das meistverkaufte Buch der Welt (siehe [Wikipedia]).

Rekorde sind aber auch in praktischen Belangen von großer Wichtigkeit: In Literatur zu statistischen Grundlagen wird erläutert, wie sich Summen von Zufallsvariablen verhalten. Dieses Wissen hilft dabei, einige praktische Problemstellungen zu lösen. Will man aber beispielsweise einen Deich bauen, so hilft einem der durchschnittliche Wasserstand bei Flut wenig. Man ist hier ebenso am Extremalverhalten interessiert, wie beim Festlegen

notwendiger Sicherheitsreserven einer Bank oder eines Versicherungsunternehmens. Wie groß kann eine Forderung an die Versicherung maximal sein?

Wasserstände, Forderungen an Versicherungen oder Laufzeiten von Athleten sind nicht deterministisch, sondern einem stochastischen Prozess unterworfen. In den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts entstand von Holland ausgehend die Extremwerttheorie (extreme-value theory), die den stochastischen Prozess von Extremen zu modellieren versucht. Es sind also gerade die Daten-Ausreißer -in der herkömmlichen Statistik oft ausgeschlossen-, die im Folgenden von besonderem Interesse sind.

Die zugrunde liegende statistische Theorie wird nun erläutert und für den 100-Meter-Lauf der Männer konkretisiert.

3.1 Grundlagen

Die (asymptotische) Theorie der Extremwerte aus Stichproben hat auf den ersten Blick eine gewisse Ähnlichkeit mit der Theorie des Zentralen Grenzwertsatzes. Der Zentrale Grenzwertsatz behandelt das Grenzwertverhalten von partiellen Summen $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ für $n \rightarrow \infty$, wohingegen die Extremwerttheorie sich mit dem Verhalten vom $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (oder $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$; wird im Folgenden vernachlässigt, da man sich nur für den Weltrekord interessiert) für $n \rightarrow \infty$ beschäftigt.

Mit X_1, X_2, \dots, X_n werden hier die persönlichen Bestwerte (transformiert in km/h) aller n 100-Meter-Athleten eines Geschlechts weltweit bezeichnet. Die genaue Definition von „Athlet“ existiert nicht, somit ist eine genaue Bestimmung von n schwierig. Natürlich ist n deutlich umfangreicher als in Tabelle 1 dargestellt, da diese nur die Spitzenathleten (in diesem Fall 762) erfasst. Wie sich später herausstellen wird, spielt der exakte Wert von n für die Schätzung jedoch keine Rolle.

Diese n persönlichen Bestwerte werden als identisch und unabhängig verteilte Beobachtungen (Zufallsvariablen) aufgefasst, die einer Verteilungsfunktion F folgen. Sei $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ die dazugehörige Ordnungsstatistik, so dass $X_{1:n}$ den ersten von n -Werten und $X_{n:n}$ den absoluten Bestwert darstellt (von Weltrekord wird hier nicht gesprochen, da dieser sich nicht in der Datenliste befindet, siehe Kapitel 2.2.). Unser Interesse liegt darin, eine Grenzwertverteilung für das Stichprobenmaximum dieser Zufallsvariablen zu finden und den rechten Endpunkt (x^*) dieser Verteilung, also das absolute Maximum zu schätzen.

Sei F die zugrundeliegende Verteilung der X_i , dann ist der Endpunkt wie folgt definiert:

$$x^* := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \quad (1)$$

Man beachte, dass x^* nicht zwingend endlich sein muss. Für die Zufallsgröße $X_{n:n}$ gilt dann folgende Aussage:

$$X_{n:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} x^* \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

Es liegt nahe, dass wir auf der Suche nach einer Grenzwertverteilung des Maximums, $X_{n:n}$ geeignet skalieren müssen (ähnlich der Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes bei der auch eine Skalierung benötigt wird). Mittels einer Skalierung kann sichergestellt werden, dass die Grenzwertverteilung nicht entartet ist (siehe [de Haan and Ferreira, 2006]). Es existieren mit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ reelle Folgen für $n \in \mathbb{N}$, so dass die Zufallsgröße

$$\frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{a_n} \quad (3)$$

eine nicht entartete Grenzverteilung besitzt.

Daraus folgt unmittelbar die Extremwertbedingung (4): Es existiert eine nicht entartete Verteilung mit einer Verteilungsfunktion G derart, dass für jeden Stetigkeitspunkt x von G gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad (4)$$

Nach dem „Satz von Fisher und Tippett“ von 1928, erfüllt einzig die Klasse der Extremwertverteilungen den Grenzwert in (4).

Die Klasse der Extremwertverteilungen wird durch die Familien der Verteilungsfunktionen $x \mapsto G_\gamma(ax + b)$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ beschrieben. Hierbei ist G_γ definiert als:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}) & \text{mit } 1 + \gamma x > 0. \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \exp(-e^{-x}) & \gamma = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Der Gestaltungsparameter γ in (5) wird Extremwertindex genannt. Je nach Wahl des

Gestaltungsparameters (und durch geeignete Wahl der Parameter a und b) ergeben sich aus der Klasse der Verteilungsfunktion G_γ drei Subklassen:

- Für $\gamma = 0$ entspricht die Verteilungsfunktion der *Standard Gumbel-Verteilung* :

$$G_0(x) := \exp(-e^{-x}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

- Für $\gamma > 0$ ergibt sich aus $G_\gamma((x-1) \cdot \gamma^{-1})$ und $a = \gamma^{-1} > 0$ die *Fréchet-Verteilung*:

$$\Phi_\alpha(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für $\gamma < 0$ ergibt sich aus $G_\gamma(-(1+x) \cdot \gamma^{-1})$ und $a = -\gamma^{-1} > 0$ die *umgekehrte Weibull-Verteilung*:

$$\Psi_\alpha(x) := \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x < 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine nicht-entartete Verteilung $G(x)$ ist also genau dann eine Extremwertverteilung, wenn $G(x)$ zum Typ der Weibull-, Gumbel- oder Fréchet-Verteilung gehört (siehe [Löwe, 2008])

Bei $G = G_\gamma$, spricht man davon, dass sich F im maximalen Anziehungsbereich von G_γ befindet (bezeichnet mit $F \in D(G_\gamma)$), also die Verteilung von x^* asymptotisch durch (5) beschrieben werden kann.

Eine zentrale Rolle bei der Bestimmung des ultimativen Weltrekords x^* fällt dem Extremwertindex γ zu. Mit Hilfe von γ kann die Verteilung exakt bestimmt werden und damit x^* geschätzt werden. Der Endpunkt ist endlich (unendlich) falls $\gamma < 0$ ($\gamma > 0$) ist. Die Formel zur Berechnung des Endwerts mit Hilfe von γ erreicht man über die folgenden Umformungen von 4 ausgehend (genauere Darstellung in [de Haan and Ferreira, 2006]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(1 - F(a_t x + b_t)) = -\log G_\gamma(x) = (1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \quad \text{mit } G_\gamma(x) > 0, t \geq 1 \quad (6)$$

(Falls t nicht ganzzahlig ist, werden a_t und b_t durch Intrapolation bestimmt.). Für große

Werte von t erhält man dann

$$1 - F(a_t x + b_t) \approx \frac{1}{t} (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}. \quad (7)$$

Definiert man $y = a_t x + b_t$, so erhält man

$$1 - F(y) \approx \frac{1}{t} \left(1 + \gamma \frac{y - b_t}{a_t} \right)^{-1/\gamma}. \quad (8)$$

Es wird davon ausgegangen, dass $\gamma < 0$ ist, um einen (endlichen) absoluten Weltrekord zu erhalten. Für y wird der Endpunkt x^* eingesetzt. $F(x^*) = 1$, per Definition von x^* . Somit ergibt sich für $t = n/k$ mit k positiv, ganzzahlig und deutlich kleiner als n (eine genaue Definition befindet sich in Kapitel 3.2),

$$x^* \approx b_{n/k} - \frac{a_{n/k}}{\gamma}. \quad (9)$$

Es wurde in (9) also eine Formel gefunden, mit der sich der Endpunkt auf einfache Weise berechnen lässt. Die Werte für die Folgen $a_{n/k}$ und $b_{n/k}$ müssen ebenso wie der Extremwertindex γ aus den Daten geschätzt werden.

Für eine detailliertere Darstellung siehe [de Haan and Ferreira, 2006] oder auf deutsch [Löwe, 2008].

3.2 Schätzer für γ und x^*

Um x^* zu berechnen, müssen die unbekanntenen Variablen aus (9) geschätzt werden. Der gebräuchlichste, da relativ einfache Schätzer für γ ist der Schätzer von Hill,

$$\hat{\gamma}_H = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\log X_{n-i:n} - \log X_{n-k:n}) \quad \text{für } \gamma > 0. \quad (10)$$

k gibt an, wieviele Beobachtungen vom rechten Ende, hier der Bestzeit, in die Schätzung aufgenommen werden; die k -te Beobachtung wird als Schwellenwert genommen. Die einzige Schwierigkeit ist die nicht triviale Wahl von k , siehe dazu Kapitel 3.3.

Da nach [Einmahl and Magnus, 2008] $\gamma < 0$ sein wird, muss der Schätzer geeignet modi-

fiziert werden. Die Autoren Einmahl und Smeets präsentieren deshalb den so genannten Momentenschätzer aus [Dekkers et al., 1989] der auf dem Schätzer von Hill basiert und für $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt. Sei für $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$

$$M_n^{(r)} = M_n^{(r)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\log X_{n-i:n} - \log X_{n-k:n})^r \quad \text{für } r = 1, 2 \quad (11)$$

das erste und zweite Moment, dann ist der Momentenschätzer definiert als

$$\hat{\gamma} = M_n^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(M_n^{(1)})^2}{M_n^{(2)}} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Im Gegensatz zum Schätzer von Hill ist (12) auch für große Stichproben verzerrt. Unter den Bedingungen von (4) und weiteren Annahmen gilt für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ asymptotische Normalität von $\hat{\gamma}$:

$$\sqrt{k} (M_n^{(1)} - \gamma) \xrightarrow{D} N(0, \gamma^2) \quad (13)$$

Für die Schätzungen von $a_{n/k}$ und $b_{n/k}$ benutzen wir die herkömmlichen Schätzer,

$$\hat{a}_{n/k} = (1 - \min\{0, \hat{\gamma}\}) X_{n-k:n} M_n^{(1)} \quad (14)$$

und

$$\hat{b}_{n/k} = X_{n-k:n}, \quad (15)$$

um mit Hilfe von (9) einen Schätzer für x^* zu erhalten:

$$\hat{x}^* = \hat{b}_{n/k} - \frac{\hat{a}_{n/k}}{\hat{\gamma}}. \quad (16)$$

Zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls um den Endpunkt x^* wird in [Einmahl and Smeets, 2009] Folgendes vorgeschlagene (siehe [Dekkers et al., 1989] oder [de Haan and

Ferreira, 2006]:

$$\frac{\sqrt{k}(\hat{x}^* - x^*)}{\hat{a}_{n/k}} \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{(1-\gamma)^2(1-3\gamma+4\gamma^2)}{\gamma^4(1-2\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma)}\right) \quad (17)$$

Die Schätzer für γ und x^* hängen entscheidend von der Wahl des Schwellenwerts k ab. Im nächsten Unterkapitel werden weitere Gedanken zu diesem Kernpunkt diskutiert.

3.3 Bestimmung des optimalen Schwellenwerts k

Die Bedeutung von k soll an folgendem Beispiel (in Anlehnung an [Weissman, 1978]) hervorgehoben werden:

Stellen Sie sich vor, ein Versicherungsunternehmen kann sich selbst bei einem Rückversicherer gegen hohe Verluste absichern. Eine Variante dieser Rückversicherung ist ECOMOR, bei der der Rückversicherer die k höchsten Schadensfälle abdeckt. Der Wert von k ist gewöhnlich klein (weniger als 10), wohingegen die Anzahl der Schadensfälle n deutlich größer ist. Der Rückversicherer muss abschätzen, wieviele Schadensfälle er abdeckt, um selbst im Extremfall den Forderungen gerecht werden zu können.

Es erscheint unrealistisch, anzunehmen, dass nur das Maximum der Daten Informationen über das rechte Ende der Verteilung enthält. Andere, niedrigere Werte tun dies genauso. In diesem Teil wird ermittelt, wie weit man sich einerseits vom Maximum wegbewegen muss und wie weit man sich andererseits wegbewegen darf. Für die Schätzung des absoluten Weltrekords bedeutet der Schwellenwert k , dass die k besten Läufer einen Einfluss auf den nächsten Weltrekord haben, der Einfluss der Anderen ist vernachlässigbar klein. Falls man zu nahe am Maximum bleibt (kleine Werte von k), werden nur wenige Rangwerte genutzt und der Schätzer hat eine hohe Varianz. Bewegt man sich weiter weg vom Maximum, sinkt die Varianz, da mehr Werte einbezogen werden, dafür wird der Bias größer.

Zur Bestimmung des Schwellenwerts ist es deshalb sinnvoll $\hat{\gamma}$ als Funktion von k darzustellen. Die Autoren Einmahl und Smeets versuchen einen Wert k zu finden, so dass der asymptotische, mittlere, quadratische Fehler (AMSE) von $\hat{\gamma}$ minimiert wird. Der AMSE kann als Summe der asymptotischen Varianz (AVar) und des Quadrats des asymptotischen Bias (ABias) dargestellt werden.

Sei $\gamma < 0$, dann gilt (siehe [Beirlant et al., 2004]):

$$AVar(\hat{\gamma}) = \frac{(1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma)(1 - \gamma + 6\gamma^2)}{(1 - 3\gamma)(1 - 4\gamma)} \frac{1}{k} \quad (18)$$

Der asymptotische Bias hängt vom so genannten Parameter zweiter Ordnung $\rho \leq 0$ ab (ein Parameter zweiter Ordnung ist ein Parameter (hier: ρ) über einen Parameter (hier: γ)). ρ ist relevant für die Extremwertbedingung (4). Der ABias hängt davon ab, ob $\rho < \gamma$ oder $\rho > \gamma$; in der Praxis ist es allerdings beinahe unmöglich zu „wissen“, welcher Fall vorliegt. Die Schätzungen von γ in der Leichtathletik sind leicht negativ, etwa -0.1 oder -0.2 (vgl. [Einmahl and Magnus, 2008]). Deshalb und da $\rho \leq 0$, benutzen wir die Gleichung für den ABias für den Fall $\rho < \gamma$:

$$ABias(\hat{\gamma}) = \frac{1 - 2\gamma}{\gamma(1 - \gamma)} c\left(\frac{n}{k}\right), \quad (19)$$

mit einer Funktion c , für die gilt: $c(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ (eine ausführliche Darstellung befindet sich in [Beirlant et al., 2004]). Der ABias hängt also von γ und der Funktion c ab. ρ gibt hier eine untere Schranke für γ an. Um den AMSE schätzen zu können, müssen zunächst die AVar und der ABias geschätzt werden. Die AVar benötigt einen Vorabschätzer für γ ; der ABias benötigt zusätzlich einen Schätzer für $c(n/k)$.

Um einen Vorabschätzer für γ zu bekommen, stellen wir $\hat{\gamma}$ in Abhängigkeit von k dar. Für kleine Werte k ist der Graph sehr unruhig; für große Werte zeigt der Schätzer typischerweise eine Verzerrung und der Graph steigt oder fällt üblicherweise. Der erste stabile Bereich des Graphen wird ausgewählt, der Mittelwert über diese Region gebildet ($\hat{\gamma}_{ini}$) und als Vorabschätzer für γ verwendet. Dies geht in der Praxis allerdings meist nicht so geradlinig. Damit die Methode nicht so empfindlich ist, wird ein Bereich für $\hat{\gamma}_{ini}$ angegeben, anstatt eines einzigen Wertes.

Aus [Beirlant et al., 2005] wird das folgende Näherungsmodell abgeleitet. Seien ϵ_j Störungsterme mit Mittelwert Null, dann gilt unter gewissen Annahmen:

$$Z_j := (j + 1) \log \frac{X_{n-j:n} M_n^{(1)}(j)}{X_{n-(j+1):n} M_n^{(1)}(j+1)} = \gamma + c\left(\frac{n}{k}\right) \left(\frac{j}{k}\right)^{-\eta} + \epsilon_j \quad \text{für } j = 1, \dots, k. \quad (20)$$

Falls $\rho < \gamma$ folgt $\eta = \gamma$. Mit einem gegebenen Vorabschätzer für γ , kann $c(n/k)$ jetzt mittels

gewöhnlicher Kleinste Quadrate Schätzung aus

$$\tilde{Z}_j := Z_j - \hat{\gamma}_{ini} = c \left(\frac{n}{k} \right) \left(\frac{j}{k} \right)^{-\hat{\gamma}_{ini}} + \epsilon_j \quad \text{für } j = 1, \dots, k \quad (21)$$

geschätzt werden. Dies ergibt

$$\hat{c}(n/k) = \frac{\sum_{j=1}^k \tilde{Z}_j \left(\frac{j}{k} \right)^{-\hat{\gamma}_{ini}}}{\sum_{j=1}^k \left(\frac{j}{k} \right)^{-2\hat{\gamma}_{ini}}}. \quad (22)$$

Der Zusammenhang der verschiedenen Schätzer aus diesem Kapitel ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt. Die Berechnung wird im folgenden Abschnitt durchgeführt.

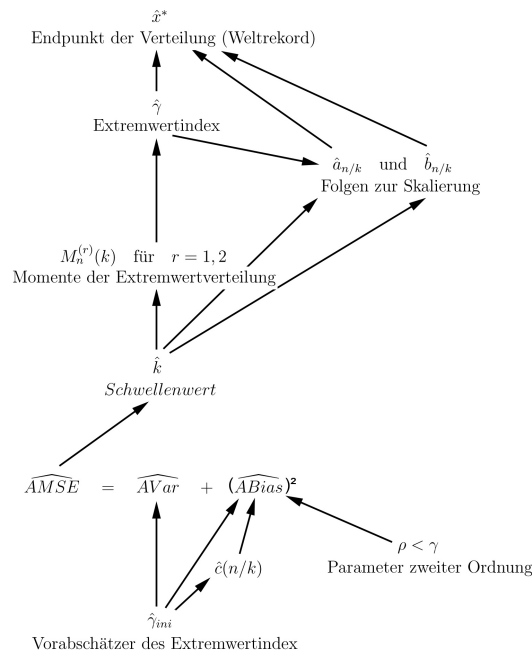


Abbildung 1: notwendige Schätzer zur Bestimmung des absoluten Weltrekords im Überblick. Eigene Darstellung.

4 Ergebnisse

Aus den Daten aus Kapitel 2.2 soll im Folgenden der ultimative Weltrekord für den 100-Meter-Lauf sowohl für Frauen als auch für Männer mit Hilfe der Theorie aus Kapitel 3

geschätzt werden.

Zuerst wird überprüft, ob die Daten der Extremwertbedingung (4) genügen. Als zweites werden die Schätzer und Methoden des vorangegangenen Kapitels angewandt, um einen endgültigen Extremwertindex $\hat{\gamma}$ für beide Läufe zu finden. Abschließend wird der Endpunkt geschätzt.

4.1 Überprüfung der Extremwertbedingung

Um die Extremwertbedingung

$$H_0 : F \in D(G_\gamma) \quad \text{versus} \quad H_1 : F \notin D(G_\gamma) \quad (23)$$

zu überprüfen, wird der Test aus [Dietrich et al., 2002] verwendet. Der Test ist vergleichbar mit einem Test auf Normalverteilung, wie er beispielsweise in der Regressionschätzung häufiger vorkommt. Abbildung 2 zeigt die Teststatistik in Abhängigkeit von k und ihr geschätztes 95%-Quantil unter der Nullhypothese (23). Für Werte der Teststatistik, die kleiner sind als der Wert des 95%-Quantils, kann H_0 nicht verworfen werden und es kann mit der Extremwertannahme weitergerechnet werden. Für beide Wettbewerbe wird die Extremwertbedingung für fast alle k nicht verworfen; Ausnahmen sind wenige niedrige Werte k . Die Auswertung, basierend auf (4), kann also weiter durchgeführt werden. Das endgültige k sollte jedoch nicht zu niedrig gewählt werden.

4.2 Schätzung von γ und Auswahl des Schwellenwerts

Zur Schätzung des AMSE wird zunächst der Vorabschätzer $\hat{\gamma}_{ini}$ benötigt. Abbildung 3 zeigt den Momentenschätzer $\hat{\gamma}$ in Abhängigkeit von k . Alle Schätzungen für γ sind negativ, dies stellt sicher, dass ein endlicher rechter Endpunkt der Verteilung existiert. Anstatt nur einen Wert $\hat{\gamma}_{ini}$ zu benutzen, berücksichtigen die Autoren einen Bereich von s_0 Werten von $\hat{\gamma}_{ini}$, um das Verfahren weniger abhängig von der Wahl des Vorabschätzers zu machen. Die „Schritte“ in diesem Bereich betragen 0.01. Bei der Auswahl der k -Region muss beachtet werden, dass dort die Extremwertbedingung gilt. Für den 100-Meter-Lauf der Männer sind sich die Autoren nicht sicher, ob der Vorabschätzer $\hat{\gamma}_{ini}$ aus der ersten stabilen Region (für k von 50 bis 80) oder aus der zweiten stabilen Region (für k von 110 bis 200) ausgewählt

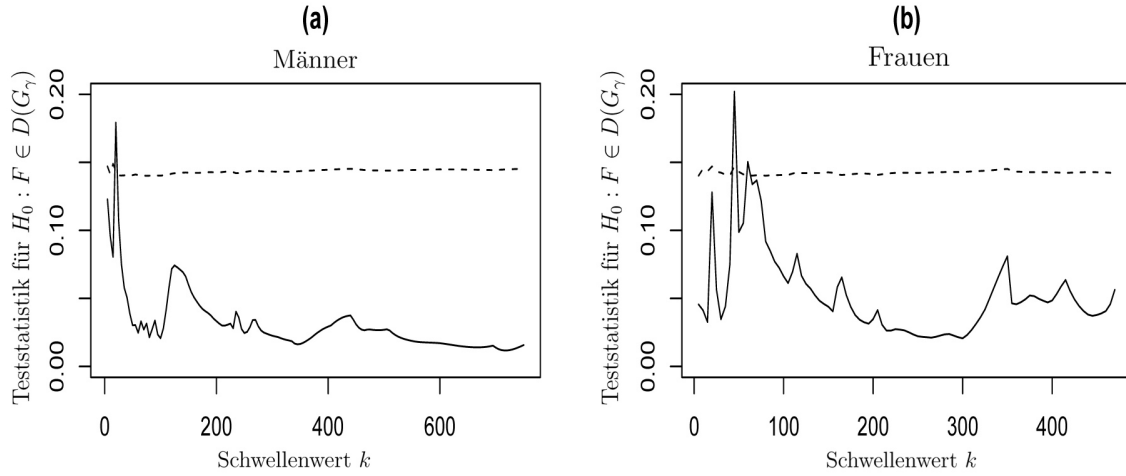


Abbildung 2: Überprüfung der Extremwertbedingung für 100 Meter der Männer (a) und 100 Meter der Frauen (b). Die durchgezogene Linie zeigt die Teststatistik, die gepunktete das 95%-Quantil.

werden soll. In der ersten Region ist der Schätzer sprunghaft, der zweite Bereich kann zu einer Verzerrung führen. Die erste Region ergibt, nach Mitteln der Einzelwerte, einen Vorabschätzer $\hat{\gamma}_{ini} = -0.25$, die zweite $\hat{\gamma}_{ini} = -0.17$. Deshalb wird für $\hat{\gamma}_{ini}$ ein Intervall von -0.25 bis -0.17 ($s_0 = 9$) bestimmt. Für den 100-Meter-Lauf der Frauen reicht der erste stabile Bereich von 60 bis 100, der zweite von ungefähr 110 bis 200. Auch hier zeigt die erste Region eine höhere Sprunghaftigkeit. Für den ersten Bereich erhält man ein $\hat{\gamma}_{ini} = -0.28$, für den zweiten $\hat{\gamma}_{ini} = -0.18$. $\hat{\gamma}_{ini}$ umfasst damit ein Intervall von -0.28 bis -0.18 ($s_0 = 11$).

Betrachtet man nun einen dieser Werte s_0 , zum Beispiel $\hat{\gamma}_{ini}^{(s)}$. Nach der Schätzung von $\hat{c}(n/k)$ kann man den asymptotischen, quadratischen, mittleren Fehler des Momentenschätzers $\widehat{AMSE}(k, \hat{\gamma}_{ini}^{(s)})$ abschätzen. Diese geschätzten AMSE können für jeden Wert $\hat{\gamma}_{ini}$ im ausgewählten Bereich gegen k aufgetragen werden. Dies führt zu s_0 verschiedenen AMSE-Graphiken. Vergleicht man diese Graphiken, stellt man fest, dass die grundsätzliche Gestalt der Graphen gleich ist. Es zeigt sich jedoch, dass die k -Region, in der der minimale geschätzte AMSE erreicht wird, von Graphik zu Graphik unterschiedlich sein kann. In [Einmahl and Smeets, 2009] wird dieses Problem gelöst, in dem für jeden Graphen eine k -Region ausgewählt wird, in der der AMSE relativ klein ist (unabhängig von den s_0 vorherigen

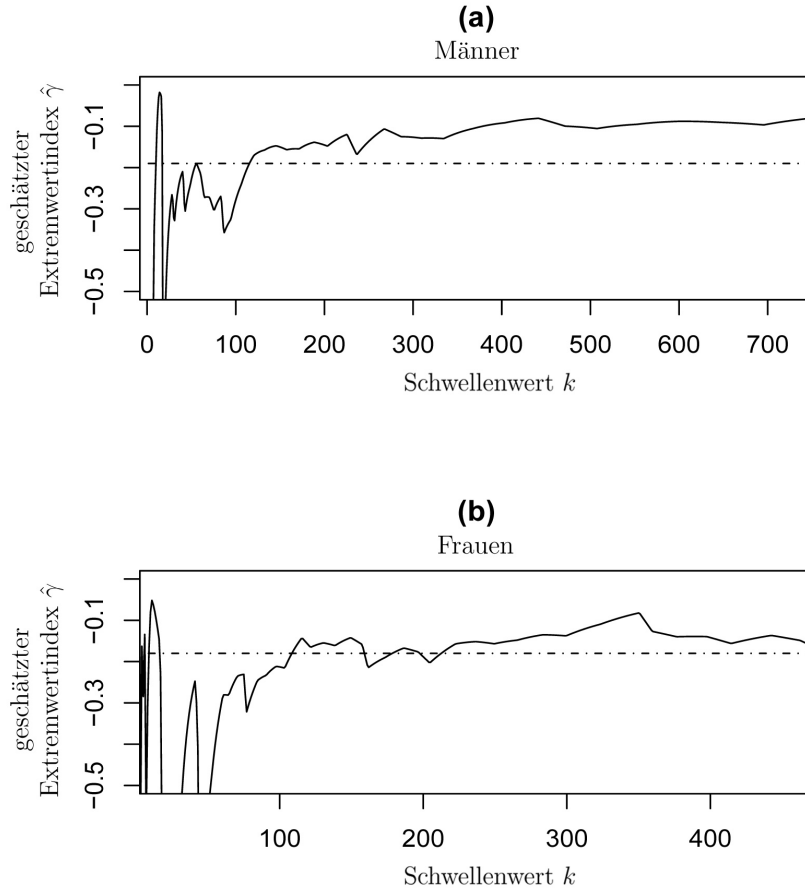


Abbildung 3: Der Momentenschätzer in Abhängigkeit von k für den 100-Meter-Lauf der Männer (a) und der Frauen (b); die horizontale Gerade zeigt das endgültige $\hat{\gamma}$.

Schätzungen) und daraus der durchschnittliche AMSE errechnet wird:

$$\overline{AMSE}(k) = \frac{1}{s_0} \sum_{s=1}^{s_0} \widehat{AMSE}(k, \hat{\gamma}_{ini}^{(s)}) \quad (24)$$

Mittels Analyse des mittleren AMSE-Graphen (siehe Abbildung 4) wird eine k -Region ausgewählt, in der der mittlere AMSE klein ist. Die senkrechten, gepunkteten Linien zeigen die endgültig ausgewählten Bereiche für k . Für die Männer haben die Autoren ein k zwischen 45 und 70 sowie zwischen 101 und 175 ausgewählt, für die Frauen k zwischen 80 und 250. Der letzte Schritt ist es nun $\hat{\gamma}$ über diese k -Regionen zu mitteln. Tabelle 2 zeigt die endgültigen $\hat{\gamma}$ für die beiden Wettbewerbe.

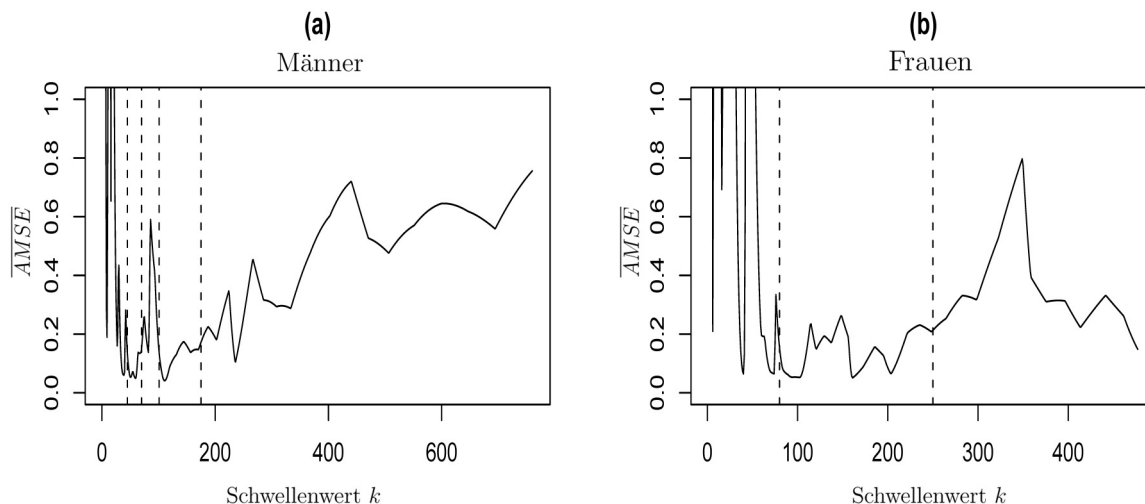


Abbildung 4: Mittelwert der geschätzten AMSE der Momentenschätzer sowohl für Männer (a) als auch für Frauen (b).

| | $\hat{\gamma}_{ini}$ | $\hat{\gamma}$ |
|-------------|----------------------|----------------|
| 100m Männer | −0.25 bis −0.18 | −0.19 |
| 100m Frauen | −0.28 bis −0.18 | −0.18 |

Tabelle 2: Schätzungen der γ .

4.3 Schätzung des absoluten Weltrekords

In diesem Abschnitt wird der absolute Weltrekord geschätzt. Um den Endpunkt zu schätzen, wird der engültige Extremwertindex $\hat{\gamma}$ in Formel (16) eingesetzt. Der so erhaltene Ausdruck hängt nur noch von k in $M_n^{(1)}(k)$ (als Bestandteil von $\hat{a}_{n/k}$) und $X_{n-k:n}$ ab. Abbildung 5 zeigt die Graphen der Endpunktschätzer. Diese Graphen sind ziemlich stabil und schon auf den ersten Blick bekommt man einen Anhaltspunkt, wo sich der absolute Weltrekord, bezogen auf die nächsten Jahre, befinden wird. Für den 100-Meter-Lauf der Männer wird der absolute Weltrekord zwischen 37.6km/h (9.57s) und 38.0km/h (9.47s) liegen, der Weltrekord bei den Frauen befindet sich zwischen 34.7km/h (10.37s) und 35.0km/h (10.29s). Um einen einzigen Wert zu bekommen, suchen die Autoren ein weiteres Mal nach dem ersten stabilen Bereich, unter der Bedingung, dass die Extremwertbedingung dort erfüllt

ist. Die genauen k -Regionen sind 110 – 200 für die Männer und entsprechend 80 – 210 für die Frauen.

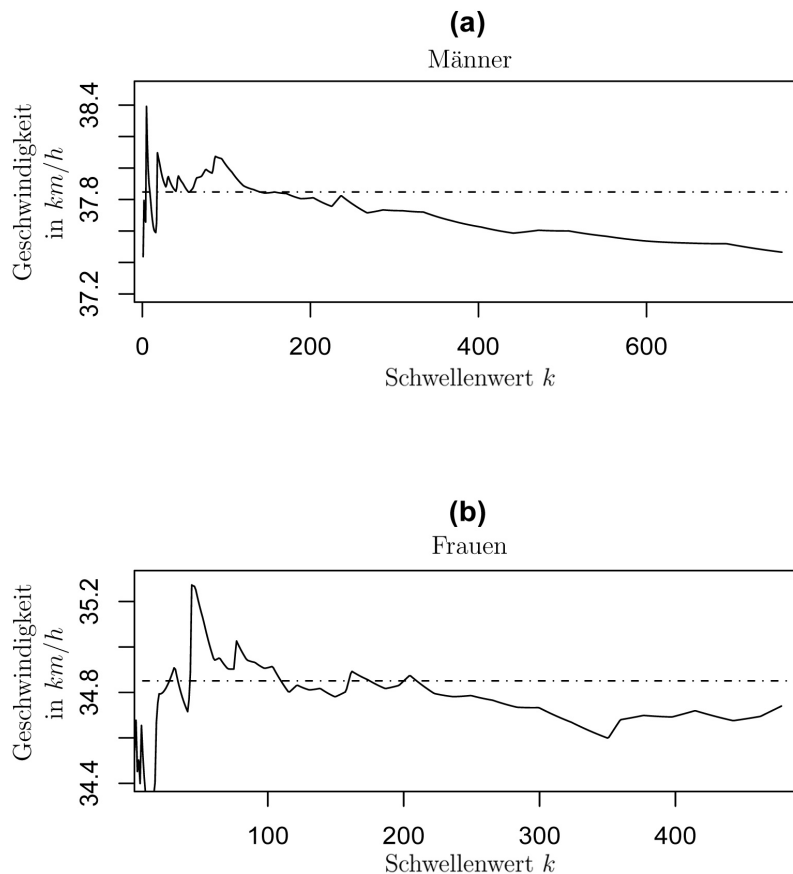


Abbildung 5: Der geschätzte Endpunkt \hat{x}^* bei festgehaltenem $\hat{\gamma}$ für den 100-Meter-Lauf der Männer (a) und den 100-Meter-Lauf der Frauen (b); die gepunktete Linie zeigt die abschließende Wahl des Endwerts.

Ein linksseitiges 95%-Intervall erhält man mit Hilfe von (17). Verwendet man das endgültige $\hat{\gamma}$, hängt das Konfidenzintervall noch von k in \hat{x}^* sowie $\hat{a}_{n/k}$ ab und von \sqrt{k} . Für jedes k aus der k -Region der Endpunktschätzung wurde das einseitige Konfidenzintervall berechnet. Über die k -Region wurde der Mittelwert gebildet und auf diese Weise die schlussendlich angenäherte untere Grenze für das Konfidenzintervall gewonnen. Tabelle 3 zeigt die endgültigen Ergebnisse.

Beim 100-Meter-Lauf der Männer ist der Verbesserungsspielraum (0.07 Sekunden oder 0.7%) schon deutlich weiter ausgereizt als bei dem Lauf der Frauen, die sich um 0.16 Sekunden oder 1.5% in den nächsten Jahren verbessern könnten. Die unteren Grenzen der

| | aktueller Weltrekord | absoluter Weltrekord | untere Schranke (95%) |
|-------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 100m Männer | 9.58s | 9.51s (37.85km/h) | 9.21s |
| 100m Frauen | 10.49s | 10.33s (34.85km/h) | 9.88s |

Tabelle 3: Die absoluten Weltrekorde und die untere Schranke des 95%-Konfidenzintervalls.

Konfidenzintervalle sind entsprechend 0.37 Sekunden (3.8%) und 0.61 Sekunden (5.8%) vom aktuellen Weltrekord entfernt. Beide Weltrekorde wurden allerdings außerhalb des Beobachtungszeitraums aufgestellt und wurden nicht berücksichtigt.

5 Abschließende Bemerkungen

5.1 Vergleich zu ähnlichen Berechnungen

Die absoluten Weltrekorde dieser Arbeit können zum Beispiel mit denen aus [Einmahl and Magnus, 2008] verglichen werden. In diesem Artikel wurden alle Daten vor 2005 betrachtet und die berechneten Weltrekorde liegen bei 9.29 Sekunden für die Männer und 10.11 Sekunden bei den Frauen. Diese Ergebnisse sind etwa 0.2 Sekunden schärfer als die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit. Ein Grund für die Unterschiede könnte im unterschiedlichen Auswahlbereich der Daten liegen. In der aktuellen Arbeit wurden die Daten von vor 1991 ausgeschlossen (da Dopingkontrollen im Wettkampf erst ab diesem Zeitpunkt stattfanden), die neuesten Daten stammen dagegen von 2008. Interessant ist die Frage, ob der Ausschluss der Daten vor 1991 zu diesen weniger scharfen Weltrekorden geführt hat. Um dieser Frage nachzugehen betrachten [Einmahl and Smeets, 2009] jetzt lediglich die Daten von 1991 bis 2005.

Mit den selben Methoden wie bisher, wird der Weltrekord für diese Daten ermittelt. Tabelle 4 zeigt die Unterschiede der Endpunktschätzungen für unterschiedliche Datenbereiche.

Die Ergebnisse für die Zeitspanne 1991-2005 stammen aus diesem Teil der Arbeit, die Periode 1991-2008 wurde in den vorangegangenen Kapiteln untersucht und die Ergebnisse für alle Daten von vor 2005 sind [Einmahl and Magnus, 2008] entnommen. Die Ergebnisse scheinen die Vermutung zu bestätigen, dass die Zeiten vor den Dopingkontrollen für den

| Zeitspanne | Autor | 100m Männer | 100m Frauen |
|------------|-----------|-------------|-------------|
| 1991-2008 | Einmahl | 9.51s | 10.33s |
| 1991-2005 | Einmahl | 9.37s | 10.36s |
| -2005 | Einmahl | 9.29s | 10.11s |
| 1896-2007 | Berthelot | 9.73s | 10.43s |
| 1900-2008 | Denny | 9.48s | 10.39s |

Tabelle 4: Verschiedene Prognosen des absoluten Weltrekords.

schärferen Weltrekord in [Einmahl and Magnus, 2008] verantwortlich sind. Entfernt man die Daten vor 1991 und fügt die Daten ab 2005 nicht hinzu, erhält man für den 100-Meter-Lauf der Frauen etwa die selbe Schätzung wie in Kapitel 4.3. Für den Lauf der Männer liegt der Schätzer zwischen dem aus [Einmahl and Magnus, 2008] und Kapitel 4.3 (vgl. Tabelle 4). In [Einmahl and Magnus, 2008] wurde allerdings mit anderen Methoden gerechnet.

In aller Kürze werden noch Ergebnisse aus zwei anderen aktuellen Arbeiten, von Forschern aus der Biologie und Physiologie, vorgestellt. In [Berthelot et al., 2002] wird ein regressionsbasierter Ansatz benutzt, um viele absolute Weltrekorde zu finden, unter anderem den über 100 Meter. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 4. Bei den Männern ist die Schätzung weniger scharf als die hier vorgestellte und wurde aktuell auch schon deutlich und mehrfach unterboten. Bei den Frauen ist die Schätzung etwas weniger scharf als hier, allerdings wird in der Arbeit hervorgehoben, dass der zweifelhafte Weltrekord (10.49 Sekunden) von 1988 einen starken Einfluss auf das Ergebnis 10.43 hat. Der Ausschluss dieses Weltrekords hätte eine Schätzung von 10.73 Sekunden zur Folge, die deutlich über dem Ergebnis dieser Arbeit liegt und auch über 10.65 Sekunden, der schnellsten Zeit seit 1991.

In [Denny, 2008] versucht man ebenfalls eine Annäherung mittels Extremwertansatz, allerdings ziemlich unterschiedlich von der hier vorgestellten. Es werden nicht nur Menschen, sondern auch Hunde und Pferde untersucht. Die Ergebnisse können wieder Tabelle 4 entnommen werden. Die 9.48 Sekunden für den 100-Meter-Lauf der Männer stimmen mit den 9.51 Sekunden von diesem Artikel sehr gut überein, die 10.39 Sekunden bei den Frauen (der Weltrekord 10.49 Sekunden wurde nicht berücksichtigt) ebenfalls.

5.2 Diskussion der Methode

Abschließend werden die von [Einmahl and Smeets, 2009] verwendeten statistischen Methoden kritisch hinterfragt.

Die Grundlage zur Schätzung der absoluten Weltrekorde ist die Extremwertbedingung (4). Voraussetzung für die Gültigkeit der Extremwertbedingung sind relative starke Annahmen, u.a. die Unabhängigkeit der Daten. Es befindet sich zwar von jedem Athleten nur eine, die beste Zeit in der Datenliste, dies garantiert jedoch keine Unabhängigkeit. Die Sportler treiben sich gegenseitig zu Höchstleistungen an; ein Athlet wird immer versuchen schneller zu sein als die Trainingspartner, das olympische Rennen zu gewinnen oder der schnellste Mensch zu werden. Athleten müssen sich an anderen Athleten, den Besten, orientieren.

Der absolute Weltrekord x^* von [Einmahl and Smeets, 2009] wird im wahrsten Sinne des Wortes „geschätzt“, denn er basiert auf der Schätzung mehrerer Parameter. Eine Großzahl dieser Schätzungen wird hintereinander durchgeführt, dass heißt Schätzer vom Schätzer des Schätzers sind nichts Ungewöhnliches (siehe dazu Abbildung 1).

Der Schätzer für $c(n/k)$ (22) gilt nur unter „gewissen Annahmen“, welche dies sind, ist unklar, ob sie erfüllt sind ebenfalls. Die Bestimmung des asymptotischen Fehlers (ABias) (19) hängt vom Parameter zweiter Ordnung ρ ab, der selbst nicht bestimmt werden kann. Die Autoren entschieden sich für die Gleichung im Fall $\rho < \gamma$, obwohl $\rho > \gamma$ nicht ausgeschlossen werden konnte. Bei einer falschen Entscheidung ist der ABias falsch und damit wohl auch der Weltrekord.

Die Bestimmung des Schwellenwerts k wird ausführlich in [Einmahl and Smeets, 2009] dargestellt; die Schwachstellen der Methodik werden dementsprechend deutlich sichtbar. Anstatt „harter“ Mathematik wird k über das „genaue Anschauen“ von Abbildung 3 und 4 gewählt. Der interessierte Leser kann anhand von Kapitel 4.2 und diesen Abbildungen versuchen, einen k -Bereich auszuwählen und diesen mit dem aus [Einmahl and Smeets, 2009] vergleichen. Die Bestimmung des Schwellenwerts scheint insgesamt recht willkürlich.

In wie weit die angeführten Schwachstellen in der Methodik die Schätzung des Weltrekords beeinflussen, kann nicht gesagt werden, da die Daten nicht vorliegen. Der Einfluss des Schwellenwerts k ist dementsprechend schwer feststellbar. Wirklich interessant wäre, inwieweit die Hinzunahme des aktuellen Weltrekords von Usain Bolt (9.58 Sekunden) den absoluten Weltrekord beeinflussen würde.

Literatur

- J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, and J. Teugels. *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. Wiley, New York, 2004.
- J. Beirlant, G. Dierckx, and A. Guillou. Estimation of the extreme-value index and regression on generalized quantile plots. *Bernoulli*, 11:949–970, 2005.
- G. Berthelot, V. Thibault, M. Tafflet, S. Escolano, and N. El Helou. The citius end: world records progression announces the completion of a brief ultra-physiological quest. *PLoS ONE*, 3:71–85, 2002. doi:10.1371/journal.pone.0001552.
- L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme Value Theory: An Introduction*. Springer, New York, 2006.
- A. Dekkers, J. Einmahl, and L. de Haan. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *The Annals of Statistics*, 17:1833–1855, 1989.
- M. Denny. Limits to running speed in dogs, horses and humans. *Journal of Experimental Biology*, 211:3836–3849, 2008.
- D. Dietrich, L. de Haan, and J. Haeusler. Testing extreme value conditions. *Extremes*, 5: 71–85, 2002.
- J. Einmahl and J. Magnus. Records in athletics through extreme-value theory. *Journal of the American Statistical Association*, 103:1382–1391, 2008.
- J. Einmahl and S. Smeets. Ultimate 100m world records through extreme-value theory. *CentER Discussion Paper Series*, 57, 2009.
- IAAF. 100 m - Introduction. <http://www.iaaf.org/community/athletics/trackfield/newsid=4661.html>. [Online: 14. November 2009].
- M. Löwe. Extremwerttheorie. *Institut für mathematische Statistik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster*, 2008.
- G. Pfeil. Allein auf dem Mond. *Der Spiegel*, 33:114ff., 2008.
- I. Weissman. Estimation of parameters and larger quantiles based on the k largest observations. *Journal of the American Statistical Association*, 73:812–815, 1978.

Wikipedia. Guinness-Buch der Rekorde. http://de.wikipedia.org/wiki/Guinness-Buch_der_Rekorde. [Online: 13. November 2009].